LA TRANSVERSALIDAD DE LA PROPORCIONALIDAD

DANIELA REYES-GASPERINI

SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

LA TRANSVERSALIDAD DE LA PROPORCIONALIDAD

Daniela Reyes-Gasperini

Investigadora de

DME-Cinvestav

Ricardo Cantoral Uriza
Coordinador de la Serie

Primera edición, 2013

Subsecretaría de Educación Media Superior
Argentina # 28 Col. Centro Histórico, Del. Cuauhtémoc
México, Distrito Federal

ISBN: 978-607-9362-01-0

Impreso en México

CONTENIDO

PRÓLOGO

Estimada profesora, estimado profesor:

Como parte de una estrategia de largo plazo para la profesionalización docente en el campo de las matemáticas, el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav del IPN) y la Subsecretaría de Educación Media Superior de la SEP, diseñaron un plan para elaborar estos materiales dirigidos a las y los profesores de Matemáticas del país. En un segundo momento, con la colaboración de la red de egresados de Matemática Educativa y el apoyo de la Sociedad Matemática Mexicana, llevaremos a cabo mesas, foros, seminarios, cursos y diplomados mediante un Plan Nacional para la Profesionalización Docente en las Matemáticas Escolares.

Quienes estamos interesados en el aprendizaje de las matemáticas no podemos reducir los conceptos a sus definiciones, ni limitar las experiencias didácticas a la repetición memorística de algoritmos y resultados. Aprender matemáticas no puede limitarse a la mera copia del exterior a través de resultados previamente elaborados, o digamos que, a su duplicado; sino más bien, es el resultado de construcciones sucesivas cuyo objetivo es garantizar el éxito ante una cierta situación de aprendizaje.

Una consecuencia educativa de este principio consiste en reconocer que tenemos todavía mucho que aprender al analizar los propios procesos de aprendizaje de nuestros alumnos; nos debe importar, por ejemplo, saber cómo los jóvenes del bachillerato operan con los números, cómo entienden la pendiente de una recta, cómo construyen y comparten significados relativos a la noción de función o proporcionalidad, o cómo se explican a sí mismos nociones de azar. Esta visión rompe con el esquema clásico de enseñanza según el cual, el maestro enseña y el alumno aprende. Estos textos se diseñaron para ayudar al docente a explorar y usarlos para una enseñanza renovada aprovechando las formas naturales en que los estudiantes razonan sobre matemáticas y sobre lo que aporta a este respecto la investigación en matemática educativa.

El papel del profesor en esta perspectiva es mucho más activo y propositivo, pues sobre él o ella recae más la responsabilidad del diseño y coordinación de las situaciones de aprendizaje. Actualmente se considera al profesor como un profesional reflexivo, que decide, diseña, aplica y experimenta estrategias de acción para lograr el aprendizaje de sus alumnos. De manera que aprender matemáticas no se reduce a recordar fórmulas, teoremas o definiciones para resolver problemas mediante la imitación de las explicaciones del profesor en clase o con apego a los métodos ilustrados en los textos escolares.

Los resultados de las pruebas nacionales de corte masivo, utilizadas con fines de investigación, permitirían saber cuáles conceptos y procesos requieren todavía adaptaciones progresivas con el fin de mejorar su aprendizaje. Si bien los últimos resultados de las pruebas de logro académico estandarizadas muestran un incremento en el porcentaje de la población estudiantil con resultados satisfactorios y un decremento en el complemento, aún falta mejorar la atención en algunas temáticas particulares.

Gracias a la labor que lleva a cabo el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, a través de sus profesores, egresados e investigadores en formación, sabemos cuáles asuntos, de naturaleza transversal, resultan fundamentales para el aprendizaje de las matemáticas y de las ciencias, como puede ser el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, la constitución de un lenguaje gráfico para las funciones, el desarrollo del pensamiento trigonométrico, el pensamiento proporcional y el pensamiento estadístico. Estos asuntos siguen siendo un reto de la mayor importancia para mejorar los aprendizajes entre los estudiantes del bachillerato mexicano.

Por esta razón, los cinco volúmenes de esta colección fueron pensados para el docente de matemáticas. Su lectura, análisis y discusión permitirá mejorar los procesos de aprendizaje matemático. Los títulos de los folletos de la serie son los siguientes:

Vol. 1 - *Lenguaje gráfico de funciones. Elementos de precálculo*

- Rosa María Farfán Márquez

Vol. 2 - *Desarrollo del pensamiento trigonométrico*

- Gisela Montiel Espinosa

Vol. 3 - *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*
- Ricardo Cantoral Uriza

Vol. 4 - *La transversalidad de la proporcionalidad*

- Daniela Reyes Gasperini

Vol. 5 - *Elementos de estadística y su didáctica a nivel bachillerato*

- Ernesto Sánchez Sánchez

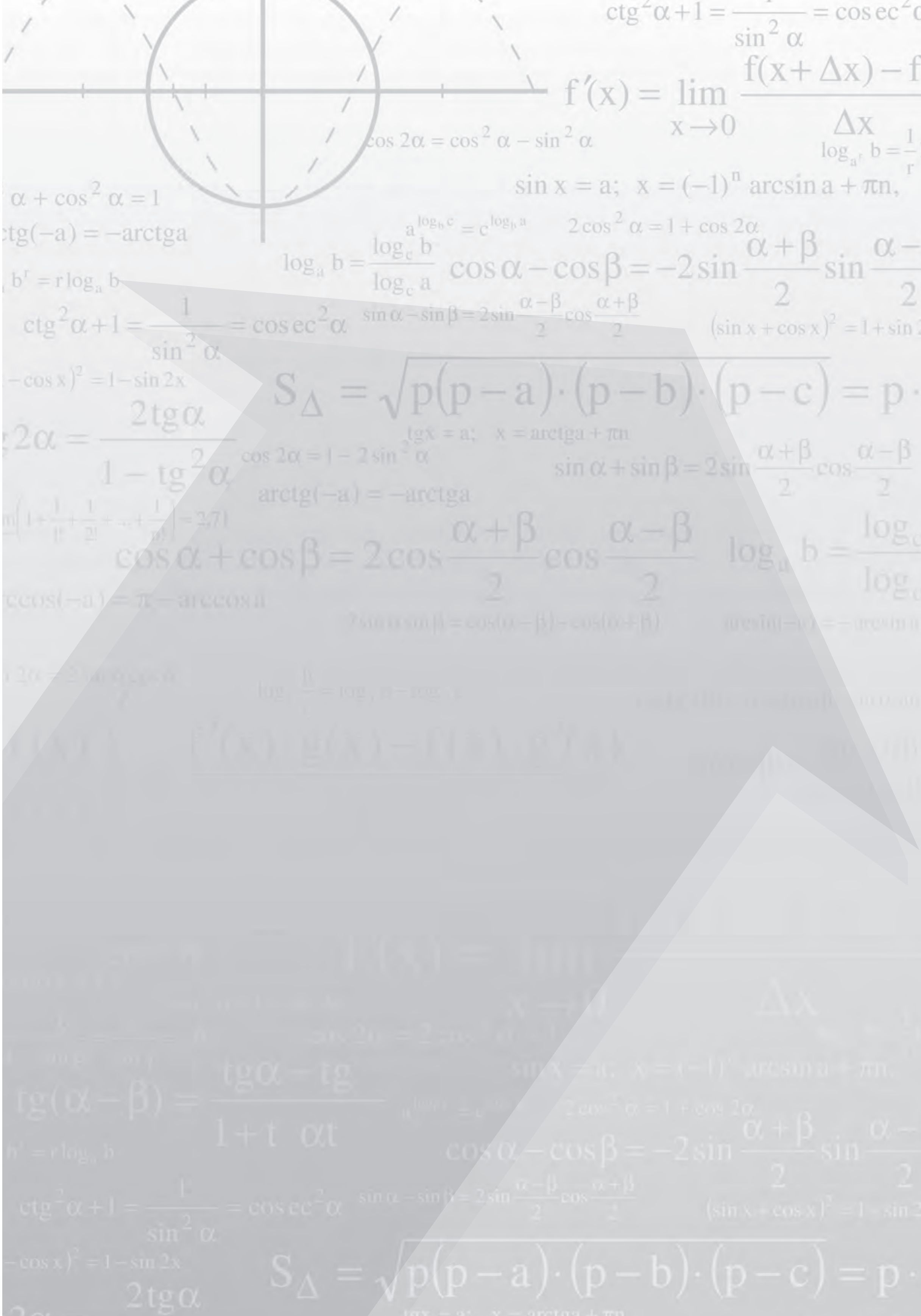
Según la profesora Régine Douady, *saber matemáticas* precisa de dos aspectos. Por un lado, se refiere a la disponibilidad funcional de nociones y teoremas matemáticos para enfrentar problemas e interpretar nuevas situaciones. En este proceso, dichas nociones y teoremas tienen un estatus de herramienta, en tanto que sirven para que alguien actúe sobre un problema en determinado contexto. Por otra parte, también significa identificar a las nociones y a los teoremas como parte de un cuerpo de conocimientos reconocidos socialmente. Es ahí que se formulan definiciones, se establecen relaciones entre nociones mediante teoremas y se prueban las conjeturas adquiriendo entonces el estatus de objeto. Al adquirir ese estatus, están descontextualizados y despersonalizados para permitir su aprendizaje. Este proceso de descontextualización y de despersonalización participa del proceso de apropiación del conocimiento. Por su parte, para un profesor enseñar se refiere a la creación de las condiciones que producirán la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes. Para éstos, aprender significa involucrarse en una actividad intelectual cuya consecuencia final sea la disponibilidad de un conocimiento con su doble estatus de herramienta y de objeto. Para que haya aprendizaje y enseñanza, es necesario que el conocimiento sea un objeto importante, casi esencial, de la interacción entre el profesor y sus alumnos.

Ésta es pues la primera de una serie de iniciativas coordinadas para la mejora de la educación en el campo de las matemáticas del bachillerato. No me resta más que animarles a estudiar y discutir los materiales que ahora tienen en sus manos, el camino es largo, pero iremos juntos ...

Dr. Ricardo Cantoral Uriza

Jefe del Departamento de

Matemática Educativa – Cinvestav


$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f}{\Delta x}$
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
$\sin x = a; \; x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$
$\alpha + \cos^2 \alpha = 1$
$\mathrm{tg}(-a) = -\mathrm{arctga}$
$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$
$2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-}{2}$
$\mathrm{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \mathrm{cosec}^2\alpha$
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)} = p\cdot$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctga}$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

INTRODUCCIÓN

La función docente, en un sentido general, suele ser cuestionada por distintos sectores de la sociedad contemporánea. Es usual, por ejemplo, que se ponga en duda el desempeño de los docentes desde ámbitos sociales diversos: la familia, la prensa y otros espacios profesionales. Nosotros, quienes nos ocupamos de la investigación educativa en el campo de las Matemáticas sostenemos, en cambio, una postura distinta: partimos del reconocimiento de la figura docente como intelectual profesional que se ocupa seriamente de la formación académica, ética y ciudadana de la juventud.

El profesional de la docencia al nivel del bachillerato se ocupa de mejorar sistemáticamente los procesos educativos que le competen. Muy en particular, analiza literatura relevante, participa en eventos académicos, escucha la voz de sus alumnos y colegas, y estudia sistemáticamente las formas de mejorar su práctica. Digamos que se empodera en el sentido de tomar bajo su control los procesos educativos a su alcance y así transformar su realidad.

El creciente interés por la profesionalización docente en el campo de las Matemáticas y las ciencias y su repercusión en distintos regiones del orbe puede ser constatado por la gran diversidad de publicaciones, artículos, libros y reportes. Algunos de los más conocidos en nuestro campo son los siguientes: Ball, Thames y Phelps, 2008; Cantoral y Reyes-Gasperini, 2012; Contreras, Carrillo, Zakaryan, MuñozCatalán y Climent, 2012; Da Ponte, Quaresma y Branco, 2012; Gellert, Becerra y Chapman, 2013; Llinares, Valls y Roig, 2008; Reyes-Gasperini, 2011; Rivas, Godino y Castro, 2012.

Las investigaciones en dicha temática se sustentan, normalmente, en reflexiones que bien podríamos denominar “clásicas” de la última década, veamos una lista de los enfoques principales, unos prescriptivos, otros normativos y unos más descriptivos:

- estudios sobre concepciones, creencias de los docentes,
- estudios relativos a la formación continua o a la profesionalización docente,
- sobre el contenido pedagógico del conocimiento,

- el contenido del conocimiento para la enseñanza,
- sobre las prácticas de los docentes a través del análisis de tareas propuestas,
- el tipo de discurso en el aula,
- los roles asumidos por los docentes y estudiantes en la relación didáctica,
- los conocimientos teóricos y prácticos que deben tener los docentes…

Es decir, existe una fuerte centración en los procesos didáctico–pedagógicos, sin que ello implique una “problematización del saber matemático escolar en juego”, es decir, no encontramos en estos estudios que se trate al saber matemático como variable: “hacer del saber un problema”, un objeto de análisis didáctico, localizando y analizando su uso y su razón de ser. Esto último, consideramos se ubica en el núcleo de la acción didáctica para la transformación educativa. Le llamaremos el “estudio de la naturaleza ontológica y epistemológica del saber matemático enseñando”. Nuestra contribución reside específicamente sobre este particular asunto: trabajar a la profesionalización docente desde la problematización del saber (matemático en nuestro caso).

Para ello, acudimos a un enfoque teórico que permite investigar *en* la educación y no *desde* la educación, un enfoque que permite intervenir a partir de la acción didáctica. Esto lo haremos desde la Teoría Socioepistemológica (Cantoral, 2013) con la que afirmamos, a contracorriente de lo que suele creerse, que es en el propio *discurso matemático escolar* donde radica el mayor causal de conflicto para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela contemporánea.

En este sentido, trataremos primeramente algunas características de dicho discurso. La matemática escolar, producto de un complejo proceso de trasposición que lleva el saber especializado al sitio didáctico (Chevallard, 1999), transforma al saber sabio y lo reorganiza en saber enseñable; es decir, el saber matemático sufre modificaciones adaptativas progresivas a fin de tematizar: seleccionar, organizar y estructurar los conocimientos matemáticos que serán incluidos en unidades de contenido escolar.

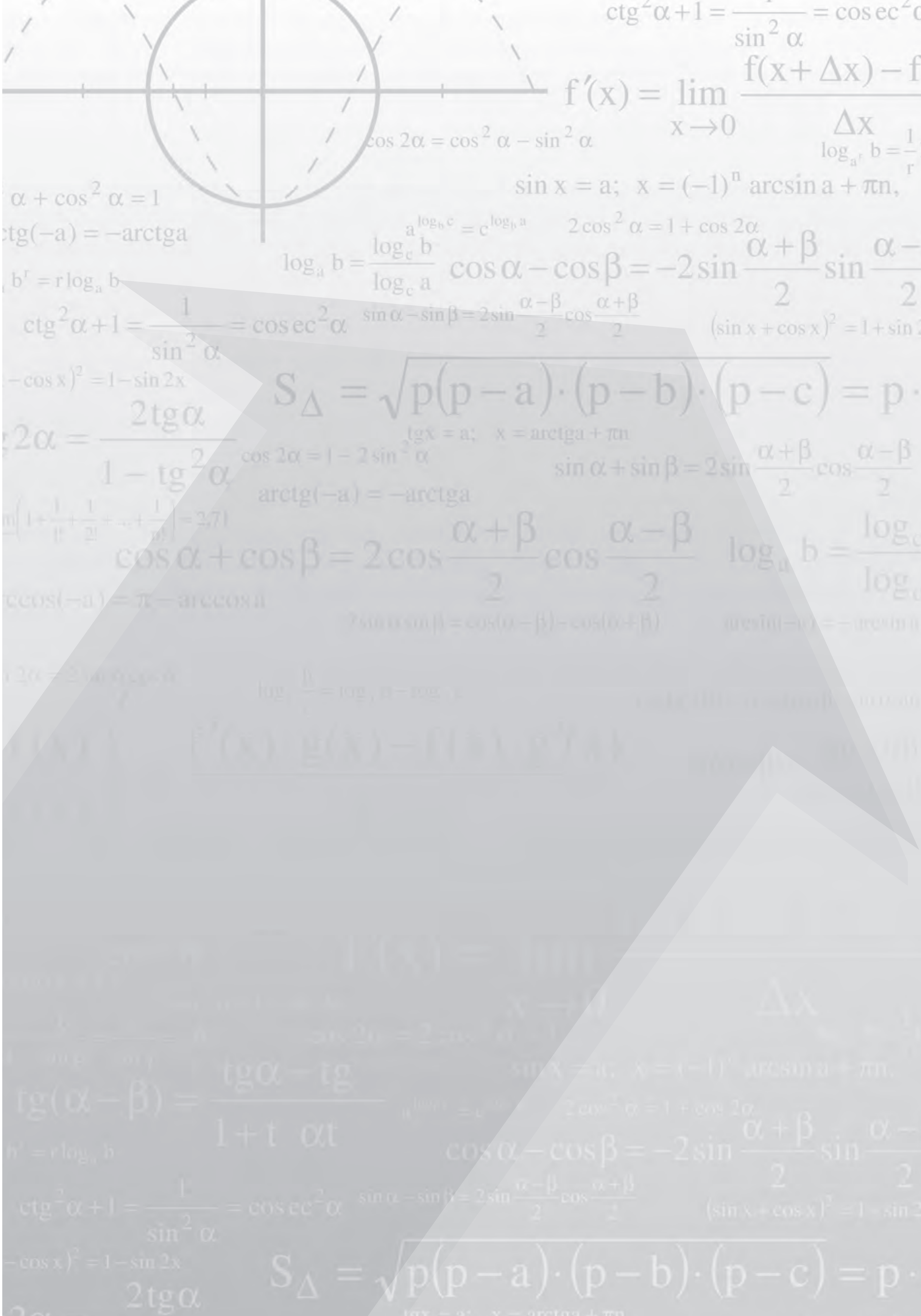
Por otra parte, es ampliamente conocido que la manera de abordar a las matemáticas en la escuela suele organizarse mediante una particular centración en los objetos matemáticos (*reificados*), concebidos como entidades abstractas ejemplificadas y ejercitadas en el aula; eludiendo en dicho tratamiento didáctico los procesos constructivos necesarios para dominar las técnicas y procedimientos matemáticos por parte del alumno; esto es, se cree que las matemáticas tratan con objetos abstractos, anteriores por tanto a la *praxis social* y en consecuencia *externas al individuo*, siendo el profesor quien comunica "verdades preexistentes" a sus alumnos, normado por el *discurso* Matemático Escolar. Por tanto, la ausencia de experiencias *constructivas de tipo social* hace del conocimiento matemático inasequible para los alumnos.

De este modo, como el saber enseñado es producto de la transposición didáctica y por tanto ha sufrido transformaciones, la Teoría Socioepistemológica permite proponer modificaciones al nivel estructura que logren aprendizajes entre los estudiantes, mediante la *construcción social del conocimiento* matemático. Todo ello permite replantear un viejo problema educativo: ***qué*** se aprende, ***quién*** lo aprende, ***cuándo*** lo aprende, ***cómo*** lo aprende y ***dónde*** lo aprende.

Ahora bien, ante el planteamiento señalado de una nueva mirada de las matemáticas escolares que toma en cuenta a los procesos de construcción social del conocimiento matemático, nos preguntamos y les preguntamos: ¿cómo repercute esto entre los docentes en fase de profesionalización? ¿Qué rol se deja jugar al saber matemático en esta experiencia formativa?

Mientras que en los enfoques clásicos se cuestionan cuánto y cuál es el tipo de conocimiento necesario del profesor para la enseñanza, cuáles son las mejores estrategias didácticas para llevar al aula y hacer más accesible un saber matemático, en este enfoque se cuestiona sistemáticamente sobre ¿cuál es el proceso que debe vivir el saber matemático para lograr aprendizajes centrados en prácticas sociales?, es decir, no sólo en objetos abstractos ajenos a la realidad del alumno. ¿Qué proceso debe vivir el docente en colectivo para lograr una adecuada apropiación del saber matemático escolar que le permita "hacerse dueño del saber que enseña y de su propia práctica"?

Desde la Teoría Socioepistemológica (Cantoral, 2011, 2013) atendemos a esta problemática afirmando que es indispensable el empoderamiento docente para "hacerse dueño de su propia práctica", ello se alcanzará mediante la problematización del saber matemático escolar y así promover un cambio significativo en la práctica docente y una mejora en la educación y los procesos didácticos asociados en el campo de las matemáticas.



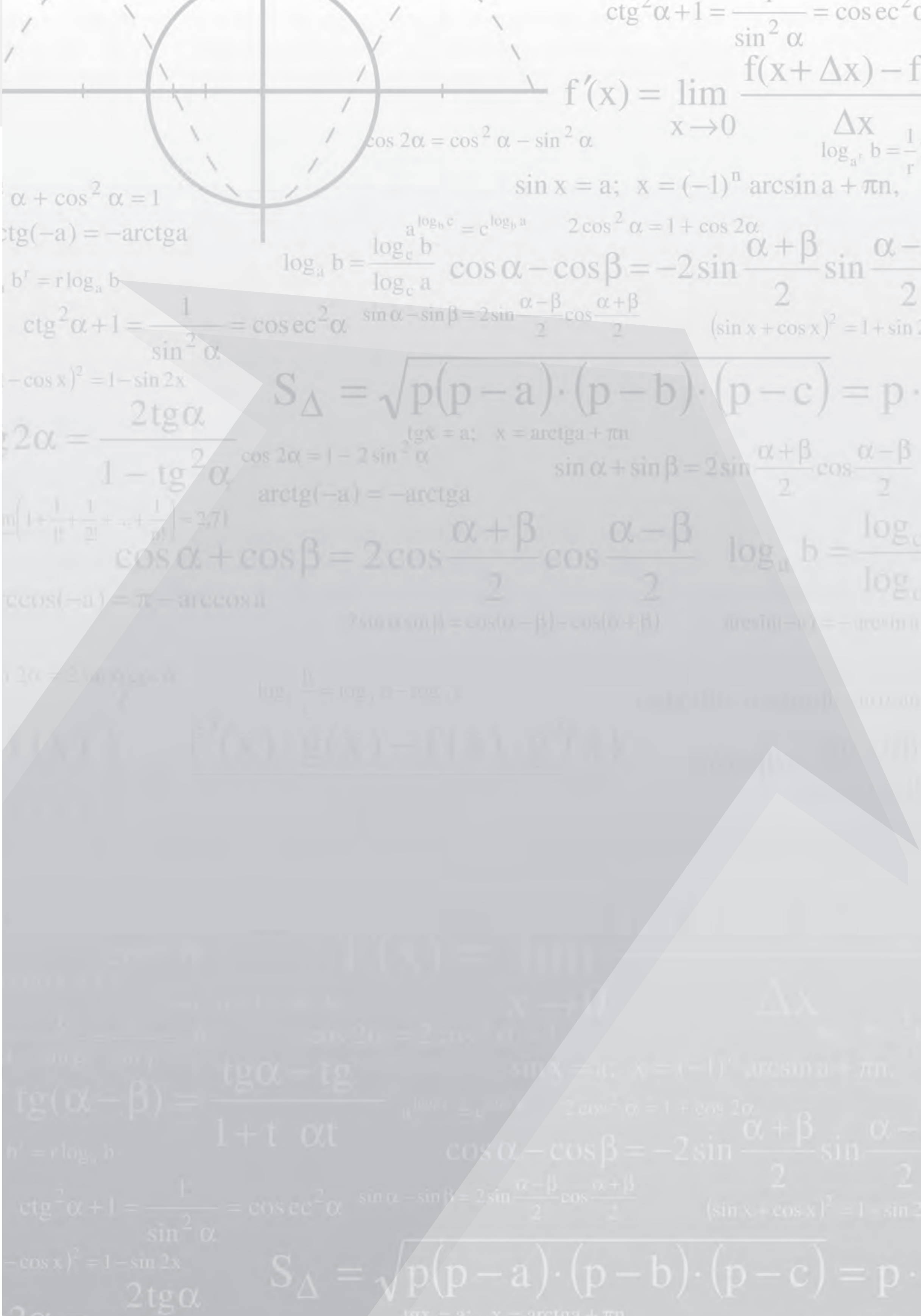
1. EL CASO DE LA PROPORCIONALIDAD

Entremos de lleno en una temática escolar de mayor importancia para la vida cotidiana de todo ciudadano: la proporcionalidad. Es un tema que recorre desde la educación básica y llega hasta la educación superior bajo modalidades interesantes en las ciencias y las técnicas. Los lectores coincidirán con la frase “la regla de tres simple sirve para encontrar el cuarto faltante”, pero también acordarán con nosotros que esta frase reduce y simplifica la profunda idea de la proporcionalidad, puesto que el pensamiento proporcional excede a la simple utilización del algoritmo descrito. En los párrafos que a continuación siguen se reflexionará ampliamente sobre los fundamentos de la proporcionalidad y sobre todo, sobre sus usos. Asumimos que esta labor es fundamental para la profesionalización docente y permitirá encarar de mejor manera los retos educativos contemporáneos del bachillerato mexicano.

La proporcionalidad, en tanto conocimiento matemático escolar, ha sido tema de estudio para la investigación científica de corte educativa por más de cuatro décadas. Las primeras investigaciones versaron sobre el examen de las dificultades que exhiben los estudiantes al resolver enunciados o problemas que involucren al razonamiento proporcional, muchos de estos estudios utilizaron fundamentos o aspectos cognitivos. Posteriormente, la investigación se orientó hacia los estudios de tipificación de estrategias ante dichas tareas: se clasificaban las posibles respuestas, las dificultades o errores mostrados por los estudiantes ante ciertas tareas o justo al momento de intentar resolver o trabajar una situación problema.

Actualmente, gracias a esas investigaciones fundacionales, se está orientando la búsqueda hacia cómo estos resultados pueden ayudar en el proceso de profesionalización docente y en la elaboración de nuevas orientaciones curriculares. Los programas formativos de la actualidad han dado un papel central a la proporcionalidad, la consideran un hilo conductor para algunos cursos de Matemáticas y Ciencias, ya que este concepto se aborda desde la vida cotidiana y se prolonga hacia la Aritmética, el Álgebra, la Geometría y la Probabilidad... y el Análisis Matemático. Argumentan, por tanto, que la riqueza del concepto de proporcionalidad permite mostrar a las Matemáticas como un todo articulado.

Por tanto, en este libro, habremos de cuestionar a la vez que construir, a través de sus distintos apartados. Localizaremos aquellas ideas que por su capacidad generativa llamaremos las ideas germinales de la proporcionalidad. Estas se obtienen después de un fino proceso de análisis teórico que problematiza el saber, nos permite localizar y analizar usos y razón de ser del saber matemático involucrado, la proporcionalidad en nuestro caso.



2. SOBRE EL APRENDIZAJE DE LA PROPORCIONALIDAD

La proporcionalidad juega un rol formativo y transversal en la construcción del pensamiento matemático de los estudiantes y de los ciudadanos en un sentido amplio. Este hecho amerita comenzar con una clara diferenciación entre nociones:

fracción, razón, proporción y proporcionalidad,

pues si bien son todas ellas afines, su significación y esencia tiene diferencias significativas entre sí, y su distinción permitirá "un acercamiento" los usos y la razón de ser de la proporcionalidad.

Desde su desarrollo matemático más temprano, los estudiantes trabajan con fracciones para expresar una cantidad (numerador) dividida entre otra cantidad (denominador). Ambos, numerador y denominador, deben ser inevitablemente números enteros y el denominador nunca habrá de ser cero, esto es formalmente escrito como sigue:

$$\frac{a}{b}; a, b \in Z; b \neq 0.$$

Si bien las fracciones son cocientes de números enteros, la "idea germen" proviene de las relaciones parte –parte y parte– todo. Es decir, al trabajar con fracciones se está trabajando con *magnitudes conmensurables*, pues pueden interpretarse como partes de una magnitud. Ahora bien, nos preguntamos ¿cómo es que surgió la necesidad de tratar con *magnitudes no conmensurables*?

Veamos esto mediante un ejemplo partiendo de la definición de conmensurabilidad.

Definición 1

Una magnitud es parte de otra magnitud, la menor de la mayor, cuando aquella mide a la mayor. Equivalentemente, dos magnitudes son conmensurables si existe una magnitud de medida común.

Ejemplo 1

Dos magnitudes lineales, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son conmensurables si existe una magnitud, $\overline{MN}$, que les sirve de unidad a ambas, es decir existen números naturales p, q tales que:

$$AB = p \times MN \text{ y } CD = q \times MN.$$

Se dice que una es tantas veces la otra. Por tanto, se puede establecer una proporción

$$\overline{AB}:\overline{CD} :: p:q$$

Veamos esto al nivel de un teorema:

Teorema 1

La diagonal y el lado de un cuadrado son magnitudes inconmensurables.

Demostración.

Sea el cuadrado $\square\, ABCD,$ con lado $\overline{AB}$ y diagonal $\overline{AC}$. Para probar que diagonal y lado no tienen una unidad de medida común, se hará la demostración por contradicción.

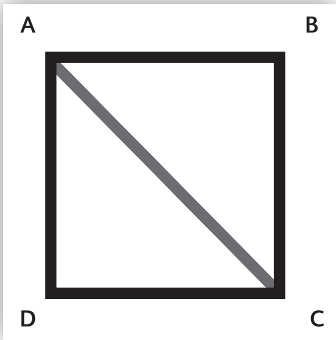


Figura 1. Demostración teorema 1.

Supongamos que existe $\overline{MN}$, unidad de medida para ambas magnitudes, $\overline{AB}$ y $\overline{AC},$ por tanto existen números naturales p y q tales que $AB = p \times MN$ y $AC = q \times MN$.

De lo cual se sigue,

$$\overline{AC}:\overline{AB} :: q:p$$

Por el teorema de Pitágoras $AC^2 = 2 \times AB^2$, por tanto $\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}$, es $\frac{q}{p} = \sqrt{2}$, lo que es una contradicción con la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

Ahora bien, si no existe una medida común, ¿cómo se pueden medir estas magnitudes? El problema de medir, fue sustituido en la teoría geométrica euclidiana por el problema de *comparar*. Este es el posicionamiento fundamental que dio origen a la teoría de las proporciones entre magnitudes. (Ver Euclides, 1991; Guacaneme, 2012)

Este hecho provocó una necesidad, la de introducir la noción de razón, pues esta es la *relación* entre dos magnitudes: su comparación. De esta manera podemos afirmar que la razón entre la longitud del lado de un cuadrado y la longitud de su diagonal es $\sqrt{2}$, pues no hablamos de una división como en el caso de las fracciones[1], sino de una relación entre las magnitudes implicadas. Lo mismo ocurre en el caso de la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, siendo esta relación la constante conocida como π.

Dado que la razón refiere a la relación entre dos magnitudes, así es como puede existir el caso, por ejemplo, de que en un conjunto de personas la cantidad de mujeres respecto a la de hombres sea de 9 a 1, 9:1 (por cada nueve mujeres hay un hombre), o bien, puede ser 9:9, lo que afirma que en ese grupo de personas hay nueve mujeres y nueve hombres, o bien podría ser 9:0, lo cual afirmaría que sólo había mujeres en ese grupo. Esto, si se viera como una fracción **no** sería válida pues el denominador es cero, sin embargo, dado que es una razón que expresa la relación entre dos magnitudes, sí es posible.

Al igual que en los casos anteriores, esta situación también se expresa en el tratamiento de otra constante famosa, la razón áurea, que es expresada como $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y que representa a la relación entre dos segmentos de una recta que forman la siguiente *proporción:*

"la longitud total **a** + **b** es al segmento más largo a, como **a** es al segmento más corto **b**, es decir, **a** + **b : a :: a : b**"

---

[1] En donde la división de dos números racioneales también es un número racional por ser el conjunto cerrado para las cuatro operaciones.

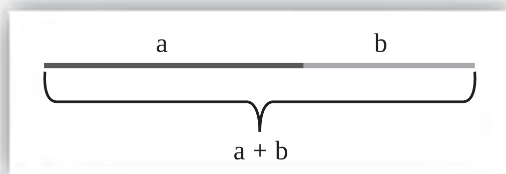


Figura 2. Representación de segmentos de recta para construir la razón áurea.

Hasta aquí, podemos evidenciar tres diferencias importantes entre las nociones de fracción y de razón. Las dos primeras concernientes a restricciones numéricas y de notación: en primer lugar, las razones al ser una relación entre dos magnitudes no tienen la restricción de ser la división entre dos números enteros (ver el caso del numerador de la razón áurea en donde uno el numerador es un número irracional) que da como resultado un número racional (ver el caso de la circunferencia en donde la relación entre longitud y diámetro es un número irracional). En segundo lugar, al no tratarse de una división entre dos números, no es necesaria la restricción realizada sobre el "denominador", pues la razón no es una fracción (ver el caso de la relación entre hombres y mujeres de un conjunto de personas). La tercera y para nosotros la más relevante, es la esencia por la cual se han desarrollado ambos conceptos matemáticos: la fracción es la expresión de una cantidad (numerador) dividida entre otra cantidad (denominador) que representa la relación parte–parte o parte–todo de un conjunto, mientras que la razón surge ante la imposibilidad de medir todas las magnitudes (surge la idea de la inconmensurabilidad).

Se desarrolla entonces la idea de relación entre magnitudes, por tanto, la notación introducida en la matemática escolar para referirse a la razón como una fracción sin las argumentaciones contextualizadas correspondientes a su construcción, produce entre la mayoría de los estudiantes una ausencia de significación, en consecuencia, una falta de comprensión del concepto matemático y los procesos asociados, por tanto se produce una reducción del aprendizaje al nivel del desarrollo de habilidades básicas, como el manejo de algoritmos sin significado para los estudiantes. Es decir, el propio *discurso Matemático Escolar* impide el aprendizaje de los estudiantes, o lo limita a la algoritmia y la memoria.

Si bien, a medida que se progrese en el desarrollo del pensamiento matemático entre los estudiantes, se comenzará también a simplificar procedimientos y las argumentaciones, sigue siendo necesario, en nuestra opinión, el introducir dichos saberes a partir de situaciones más vivenciales que les permitan tratar las diferentes argumentaciones posibles, así como sus usos y la razón de ser de dicho saber. Un ejemplo de los rituales didácticos no significativos que consideramos equivalente es aquello que ocurre con las situaciones de "despeje de la x", ahí aparecen frases del tipo "lo que está sumando pasa restando", soslayando la noción de la Ley Uniforme[2] y generando en los estudiantes una sensación de magia matemática, más que estructura y argumentación matemática.

Ahora bien, la noción de proporción, como hemos ejemplificado anteriormente, aparece cuando se trabaja con dos pares de relaciones numéricas que se corresponden, de donde devienen las propiedades de las proporciones, por ejemplo, la igualdad del producto cruzado de los numeradores y denominadores (expresados como fracciones), o bien, cualquier "reacomodación" posible de la igualdad planteada $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Por último, se llaman proporcionales a las magnitudes que guardan la misma razón, es decir, no se habla de la igualdad entre dos razones (idea aritmética), sino que se está hablando de la relación que se mantiene constante entre dos magnitudes (idea variacional). Sobre la proporcionalidad, como se dijo al comienzo de este escrito, existe un gran bagaje de investigaciones.

Las investigaciones fundamentales de Piaget e Inhelder (1977), enunciaron que la noción de proporcionalidad se inicia siempre, inevitablemente, de una forma cualitativa y lógica, antes de estructurarse cuantitativamente. En este paso de lo coloquial a lo simbólico es donde los estudiantes empiezan a cuantificar y a enfrentarse con la construcción de "lo matemático", pudiendo considerarse un medio para construir un significado de "lo proporcional". Para mayores detalles remitimos al lector a Cantoral y Reyes-Gasperini (2012); Reyes-Gasperini y Cantoral (2011).

Ambos investigadores, Inhelder y Piaget (1972) realizaron estudios experimentales con niños a fin de comprender cómo es que se desarrolla el pensamiento de lo proporcional, utilizando, entre otros ejemplos, una muy interesante situación respecto al equilibrio de la

---

[2] Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta un mismo número o una misma expresión algebraica, la ecuación que resulta es euivalente a la dada. Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un mismo numero, distinto de cero, la ecuación resultante es equivalente a la dada.

balanza. Su objetivo fue el de estudiar cómo se elabora el esquema de proporcionalidad en relación con el problema del equilibrio. Sus conclusiones en cuanto al esquema de la proporcionalidad enuncian lo siguiente:

Conviene recordar en primer lugar que en todos los dominios y no sólo en el caso de nuestras actuales experiencias, la comprensión de las proporciones no aparece antes del nivel III A. Se observa a menudo en los sujetos del subestadio II B la búsqueda de ***una misma relación en el interior de dos relaciones que se comparan entre sí, pero se concibe que la naturaleza de la relación es aditiva:*** *en vez de la proporción* $P/P' = L'/L$*, se tiene entonces una igualdad de diferencias* $P - P' = L' - L$*. La formación de la idea de proporcionalidad supone pues que en primer lugar, se* ***sustituyan las simples relaciones de diferencia por la noción de la igualdad de productos*** $PL = P'L'$*. Sin embargo importa además señalar que este pasaje de la diferencia al producto pocas veces se realiza de entrada bajo una formación métrica: por lo general la cuantificación numérica de la proporción se halla precedida por un esquema cualitativo fundado en la noción de producto lógico, vale decir, por la idea de que* ***dos factores que actúan juntos equivalen a la acción de otros dos factores reunidos****. (Inhelder y Piaget, 1972, p. 152, las negritas son nuestras)*

Los colegas Godino y Batanero (2002), enuncian respecto a uno de los modelos del pensamiento proporcional, denominado modelo aditivo, que si bien este tipo de estrategias son útiles para enfrentar con éxito ciertos problemas más sencillos, no son válidos en el caso general. Ejemplifiquemos esta situación mediante lo siguiente:

+¿?

Kilos de tortilla	Precio
1	14
1.5	21
2	28
3	42

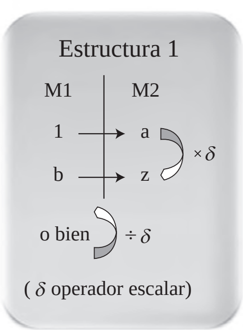
+14

+14

Es posible decir que si un kilo de tortillas vale $14, dos kilos de tortillas valdrán $28, tres kilos valdrán $42 y podría asegurarse que, dado que se suma de manera constante $14, esa es la constante de proporcionalidad. Sin embargo, si preguntáramos el valor de un kilo y medio de tortillas, ya no podríamos decir que se suma constantemente $14.

Se puede interpretar, bajo este ejemplo, la delimitación que provoca el modelo aditivo de la proporcionalidad. En este caso, se precisaría avanzar con el tipo de argumentaciones para justificar la existencia de una constante de proporcionalidad, pues la suma reiterada de un valor corresponderá a la constante de proporcionalidad siempre que el dominio sea de números enteros. Sugerimos que esto lo discutan en pequeños grupos y con sus estudiantes.

Por su parte, Carretero (1989) distingue dos tipos de estructuras especiales. Por un lado, aquellas que presentan una relación dada entre magnitudes homogéneas a las que denomina *modelo multiplicativo escalar*; y por el otro, aquellas que presentan una relación entre magnitudes heterogéneas, denominada *modelo multiplicativo funcional*. Posteriormente Lamon (1993; 1999) realiza también una distinción como estrategias de los estudiantes para hallar el valor faltante de una proporción. Él los denomina modelo inter (correspondiente al modelo multiplicativo escalar) y modelo intra (correspondiente al modelo multiplicativo funcional). El trabajo con los diferentes tipos de estructuras multiplicativas en torno a la adquisición de la noción de la proporcionalidad, le permitió concluir a Carretero que "la división es, evidentemente una operación más difícil que la multiplicación, a pesar de la estructura multiplicativa que subyace" (Carretero, 1989, p. 95). De esto concluimos que el modelo aditivo precede al modelo multiplicativo escalar, el cual, es menos complejo que el modelo multiplicativo funcional.



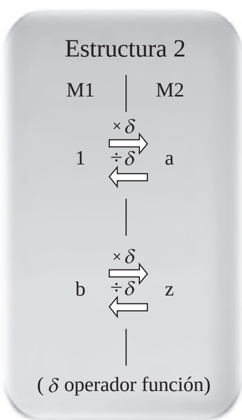


Figura 3: Isomorfismo de medidas o estructura simple. (Carretero, 1989, pp.86-87)

Siguiendo el ejemplo de las tortillas, estos modelos podrían interpretarse de la siguiente manera:

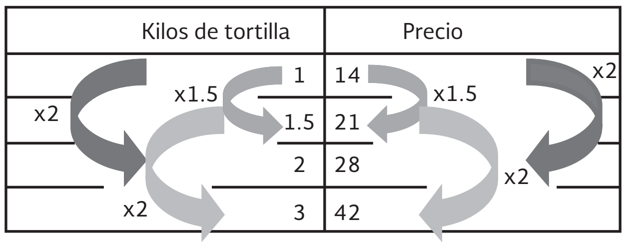


Figura 4. Modelo multiplicativo escalonar o inter.

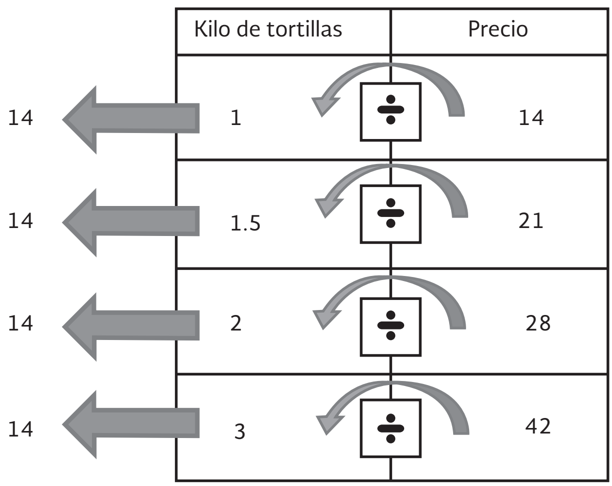


Figura 5. Modelo multiplicativo funcional o intra.

El investigador francés, Gerárd Vergnaud (1990) desarrolló la teoría de los campos conceptuales, teoría muy influyente en el mundo de la didáctica de las matemáticas. Él inició considerándolos como un conjunto de situaciones, las cuales se puedan “analizar como una combinación de tareas de las que es importante conocer su naturaleza y la dificultad propia” (Vergnaud, 1990, p. 140). Respecto a la proporcionalidad, compara los campos conceptuales de las estructuras aditivas (aquellas que precisan una adición, sustracción o combinación de ellas) y las estructuras multiplicativas (aquellas que requieren una multiplicación, división o combinación de ellas).

Esto le permite generar una clasificación y análisis de las *tareas* cognitivas y en los procedimientos que potencialmente son puestos en juego en cada una de ellas. Reconoce en sus conclusiones que el análisis de las estructuras multiplicativas es profundamente diferente de las estructuras aditivas.

A partir del análisis cognitivo que hemos desarrollado, se han podido sintetizar los modelos de pensamiento proporcional en el esquema que se muestra en la figura 6, el cual sirve como herramienta de análisis ante la tarea de interpretar las respuestas de los estudiantes ante ciertas tareas. Esto es así, en virtud de que cada uno de estos modelos encierra una estrategia específica de pensamiento matemático.

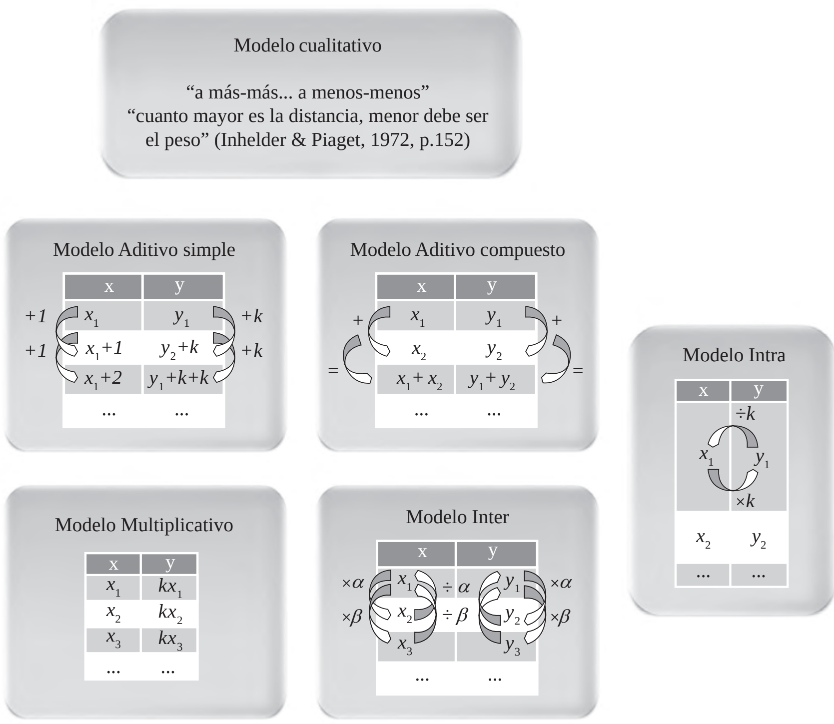
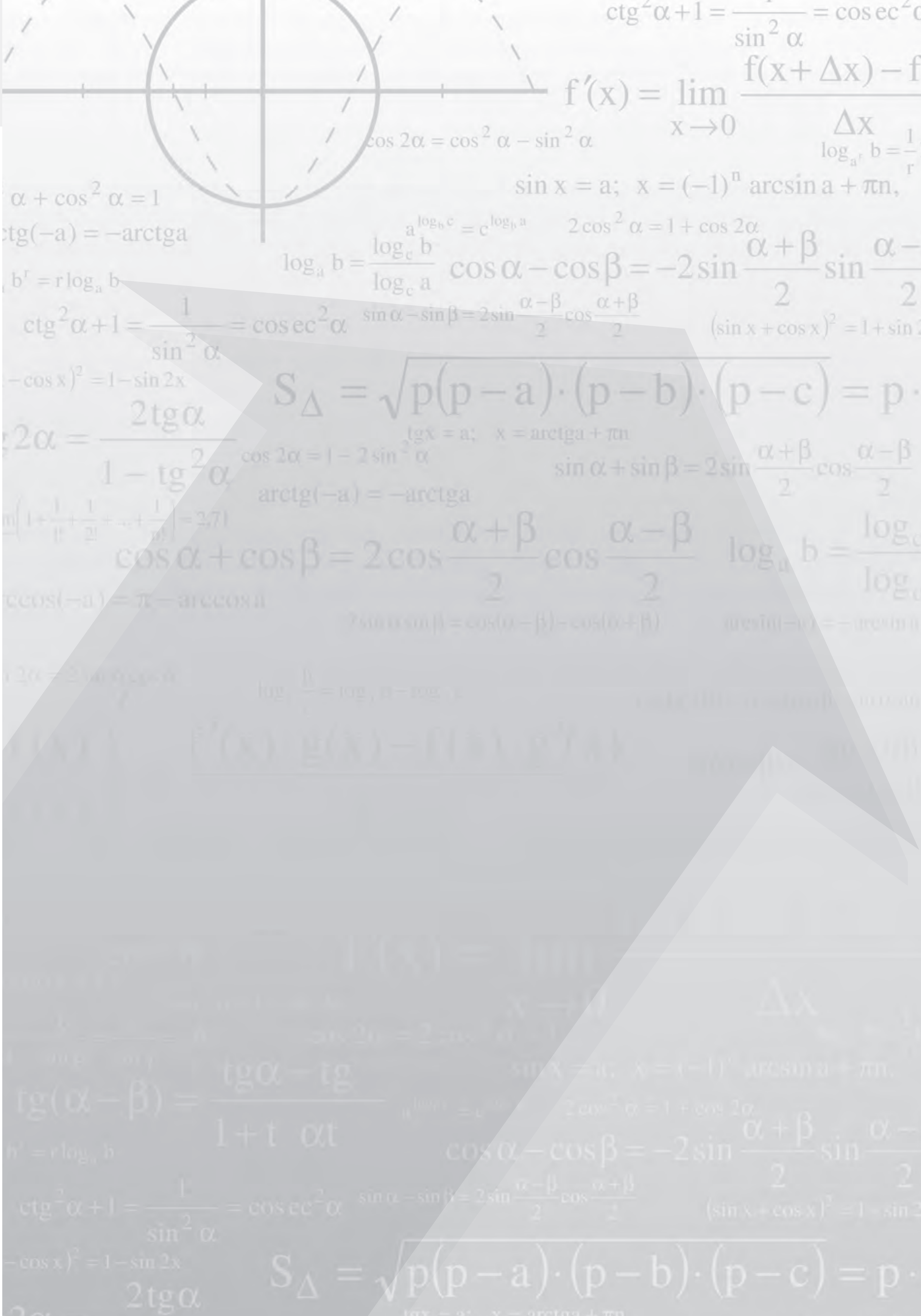


Figura 6. Modelos del pensamiento proporcional. (Reyes-Gasperini, 2011)

Estos tipos de pensamientos permiten interpretar e intervenir didácticamente en su momento, sobre las respuestas que produzcan los estudiantes y tomar las riendas de las situaciones a fin de generar discusiones pertinentes que lleven a la idea de la proporcionalidad sustentada como la relación que se mantiene constante entre dos magnitudes. Es importante aclarar que este hecho permitirá a los estudiantes transitar el proceso de significación de la proporcionalidad, no porque el modelo intra sea "el mejor", sino porque es una manera de acercarse a la proporcionalidad que soslaya el discurso Matemático Escolar. Este es todavía un reto didáctico. ¿Cómo llevar estos resultados a nuestras propias aulas?

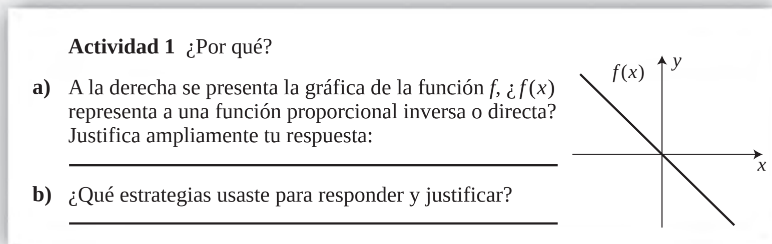
Si bien en este apartado se ha colocado un ejemplo que podría considerarse sencillo para los estudiantes, sabemos que en verdad esto no es así. Permitirá que afloren las “dudas y certezas del entendimiento” de nuestros estudiantes. Los docentes podrían complicar la tarea si les resulta interesante, podrían extender sus diseños didácticos hacia otras temáticas: los casos de la posición de un móvil que se desplaza en línea recta con velocidad constante, la elasticidad de los resortes y su relación con la Ley de Hooke, las razones trigonométricas en la vida cotidiana, o el estudio de las probabilidades clásicas, o la regla de L’Hôpital y el análisis local de las curvas, entre otras.



3. ACTIVIDADES PARA DISCUTIR

Actividad: ¿Proporcionalidad directa o inversa?

Comenzaremos con un ejemplo puramente matemático, pero con una intencionalidad didáctica...



Actividad 1 ¿Por qué?

a) A la derecha se presenta la gráfica de la función f, ¿$f(x)$ representa a una función proporcional inversa o directa? Justifica ampliamente tu respuesta:

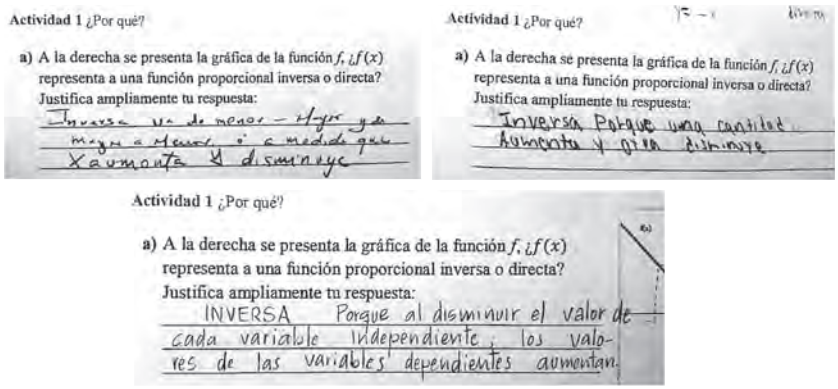
b) ¿Qué estrategias usaste para responder y justificar?

Figura 7. ¿Proporcionalidad directa o inversa?

OBSERVACIÓN: Antes de continuar leyendo, les proponemos respondan a cada una de las preguntas planteadas en su cuaderno y que, si les es posible, produzcan un debate con sus colegas más cercanos. Analicen por qué unos contestan una cosa y otros, otra.

En diversas experiencias anteriores, hemos comprobado que más de la mitad de los individuos participantes (estudiantes y docentes) contestan que la gráfica representa una función de proporcionalidad inversa y lo sustentan con diversas argumentaciones, una de las más socorridas es la siguiente: “porque a medida que aumenta la x, disminuye la y”.

Como se puede observar a partir de algunas de las respuestas obtenidas, aunque en una de ellas figure la relación “$y=-x$”, es más fuerte en su razonamiento la regla establecida a partir del pensamiento cualitativo, “a más, más” o “a menos, menos”.


Actividad 1 ¿Por qué?

a) A la derecha se presenta la gráfica de la función f, ¿$f(x)$ representa a una función proporcional inversa o directa? Justifica ampliamente tu respuesta:
Inversa va de menor – Mayor y de Mayor a Menor, ó a medida que X aumenta Y disminuye

Actividad 1 ¿Por qué?

a) A la derecha se presenta la gráfica de la función f, ¿$f(x)$ representa a una función proporcional inversa o directa? Justifica ampliamente tu respuesta:
Inversa Porque una cantidad Aumenta y otra disminuye

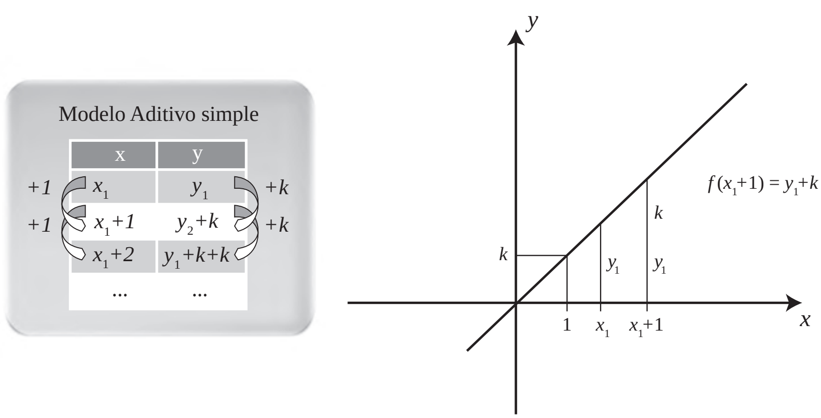
Actividad 1 ¿Por qué?

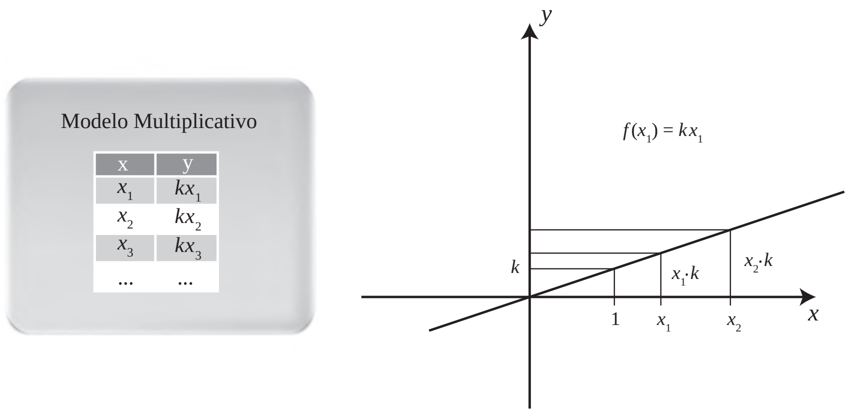
a) A la derecha se presenta la gráfica de la función f, ¿$f(x)$ representa a una función proporcional inversa o directa? Justifica ampliamente tu respuesta:
INVERSA Porque al disminuir el valor de cada variable independiente; los valores de las variables dependientes aumentan.

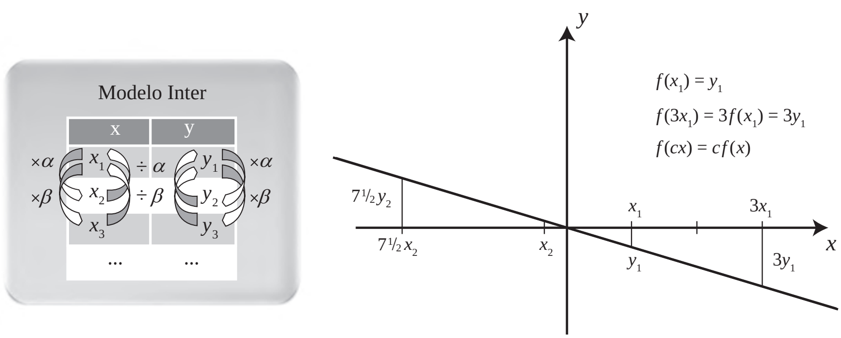
Figura 8. Ejemplos de argumentaciones de los profesores.

Esta respuesta corresponde a un análisis del tipo cualitativo ante la situación propuesta, sin embargo, la respuesta matemáticamente es errónea, pues la gráfica representa una función de proporcionalidad directa... ¿si? Daremos ahora diversas argumentaciones posibles al respecto:

- Respuesta relativa a la representación gráfica: es una recta que pasa por el origen.
- Respuesta relativa a la expresión algebraica: dado que es una recta que pasa por el origen su expresión es del tipo $y = mx + b$; en donde $b=0$ y por tanto, $y=mx$.
- Diversas argumentaciones gráficas con base en los modelos del pensamiento proporcional:

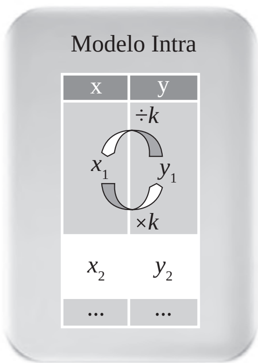


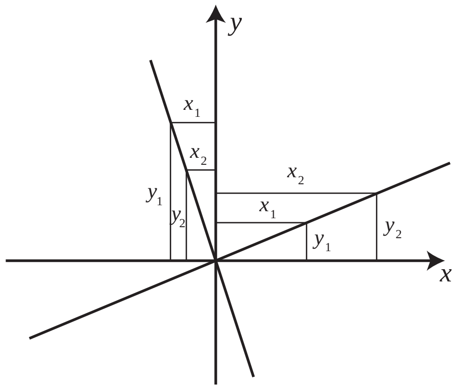




Ahora bien, una precisión es necesaria. El último de los modelos, que radica en la idea de la razón entre las magnitudes, resulta ser evidente si se estudia a través de procesos variacionales, en vez de ser vistos como una relación aritmética entre dos valores.

Analicemos por qué. En la gráfica no se puede observar –al menos a simple vista– la relación entre las magnitudes, pues esto es más conceptual. Sin embargo, es sabido que en las funciones de proporcionalidad directa, funciones del tipo $y = kx$, la constante de proporcionalidad k representa matemáticamente a su pendiente, pues $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2}$.





Es por esto que en las funciones lineales, funciones cuya expresión algebraica tiene el tipo $y = mx + b$, el invariante o constante (su pendiente) es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ que es también llamada *razón de cambio*. La pendiente, como noción geométrica, hace referencia a una medida de la inclinación de la recta, mientras que la razón de cambio hace referencia a la variación de una variable respecto de otra entre dos puntos particulares. Esta sutileza, que sólo la problematización del saber hace emerger, puede ser la base de un rediseño del discurso escolar.

Dada la gráfica y los datos correspondientes, resultará sencillo

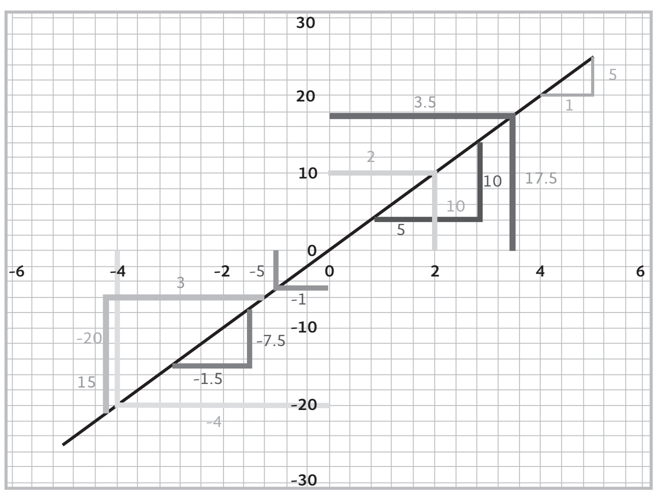


Figura 9. Razón de cambio.

encontrar la expresión algebraica para dicha función:

$$5 = \frac{17.5 - 0}{3.5 - 0} = \frac{7.5 - (-15)}{-1.5 - (-3)} = \frac{7.5}{1.5} = \frac{-5 - 0}{-1 - 0} = \frac{25 - 20}{5 - 4} = \frac{5}{1}$$

La razón de cambio es constante, pues en todos los casos vale 5

Si la recta representara el desplazamiento lineal de un móvil, como una función del tiempo, digamos la de un vehículo, podríamos asegurar que éste se mueve con velocidad constante, pues se mantiene invariante la relación del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, entre el incremento en y y el incremento en x. Lo cual significa que el desplazamiento (representado por Δy) es directamente proporcional al intervalo de tiempo o periodo (representado por Δx). Por este motivo, su razón mantendrá un valor constante: la razón de cambio es constante y se calcula así: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

En el programa del ciclo escolar de la secundaria, se presenta lo siguiente:

Razonamiento proporcional

El razonamiento proporcional en las matemáticas

La noción de razón surge al comparar dos números o magnitudes a través de su cociente, mientras que las proporciones resultan de comparar los valores de dos listas de números o cantidades variables para ver si guardan siempre la misma razón entre sí. Si llamamos a y b a dos cantidades, su razón está dada por el cociente:

$$\frac{a}{b}$$

Y si denotamos por x los valores que puede tomar una cantidad variable y por y los valores correspondientes de la otra, decir que x e y son proporcionales significa que las dos cantidades están relacionadas por una expresión como la siguiente:

$$\frac{y}{x} = k \quad \text{donde } k \text{ es la constante.}$$

A pesar del aspecto tan sencillo de las fórmulas anteriores, las nociones de proporcionalidad y sus consecuencias son centrales en todas las matemáticas. (SEP, 2004, p. 88)

Al respecto nosotros nos preguntamos, ¿cuán sencillas serán para el estudiante estas fórmulas? Pues, demos el ejemplo de la siguiente tabla de valores, con valores sencillos, y “apliquemos” la fórmula planteada:

x	y	$k = \frac{y}{x}$
-2	4	$\frac{4}{-2} = -2$
-1	2	$\frac{2}{-1} = -2$
0	0	$\frac{0}{0} =¿?$
6	-12	$\frac{-2}{6} = -2$

El hecho de que esa fórmula pueda ser aplicada es que subyace en ella un proceso variacional, por este motivo, es que conjeturamos que este tipo de pensamiento resulta ser evidente si se estudia a través de la idea de un proceso variacional más que como una relación aritmética entre dos valores, pues para decir que en el caso de $\frac{0}{0}$ la constante es -2, deberíamos utilizar argumentaciones que podríamos construir, teniendo en cuenta la organización del Sistema Educativo, durante el bachillerato, pues es en este momento cuando se estudia el cálculo:

Dada $f(x) = ax$, siendo en nuestro caso particular $a = -2$, y considerando $x = 0$,

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) + f(0)}{h}$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) + 0}{h}$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{-2h + 0}{h}$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} (-2)$$

$$f'(0) = -2$$

Entonces, la derivada de f en cero es la constante negativa -2, $f'(0) = -2$.

De aquí que conjeturamos que cuando estamos trabajando con las funciones proporcionales dentro del Cálculo matemático, ya no se están comparando magnitudes inconmensurables de donde ha surgido la idea de proporcionalidad y el desarrollo del pensamiento proporcional, sino que éste se articula con un pensamiento variacional. Por tanto, el desarrollo del pensamiento proporcional amerita instancias previas a su articulación con el pensamiento variacional, que servirán de sustento posteriormente para trabajar con la noción de L'Hôpital, por ejemplo.

Esta situación se cumple para todas y cada una de las funciones lineales: la razón de cambio es constante. En particular, para que se reconozca como una función de proporcionalidad directa, debe ocurrir que la ordenada al origen valga cero para garantizar que la relación entre las magnitudes, en cuanto a su razón, se mantenga constante porque si esto no fuera así, no existiría dicha razón. Veámoslo algebraicamente:

$$y = mx + b$$

$$y - b = mx$$

$$\frac{y - b}{x} = m$$

Se puede observar que la razón no podrá permanecer constante, pues el valor fijo de la ordenada al origen generará alteraciones en la relación entre x y y como razón constante.

Gráficamente, también puede observarse que, tal como se dijo párrafos atrás, existe un modelo de pensamiento proporcional llamado "modelo aditivo compuesto" que puede expresarse de la siguiente manera: $f(x + y) = f(x) + f(y)$. En un análisis epistemológico sobre la proporcionalidad nos encontramos que, con base en los estudios realizados por Cauchy, se ha denominado a dicha igualdad como un *funcional de Cauchy*. (Quien lo desee profundizar sobre estos temas puede hacerlo en Roa, 2010). Este funcional lo que asegura es que dicha propiedad construye la función de proporcionalidad. Por lo cual, nosotros gráficamente podemos asegurar que una recta que pasa por el origen es de proporcionalidad, pues:

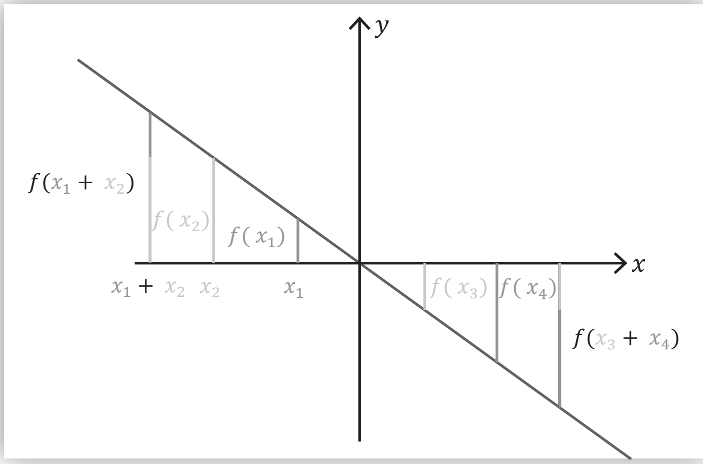


Figura 10. Modelo aditivo compuesto. Representación gráfica.

Sin embargo, si la recta no pasara por el origen, no se cumple la propiedad $f(x+y) = f(x) + f(y)$ por tanto queda descartada la posibilidad de que la función $y = mx + b, b \neq 0$ fuera una función de proporcionalidad directa. Veamos los argumentos analítica y gráficamente.

Analíticamente tenemos que:

Si $f(x) = mx + b$ y $f(y) = my + b$, entonces:

$$f(x+y) = mx + b + my + b$$

$$f(x+y) = m(x+y) + b + b$$

$$f(x+y) = f(x+y) + b$$

Por tanto, no cumple la propiedad para ser una función de proporcionalidad directa.

Ahora bien, gráficamente podemos observar que para una función del tipo $y = mx + b, b \neq 0$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, pues a simple vista es evidente que la suma de las imágenes no es igual a la imagen de la suma.

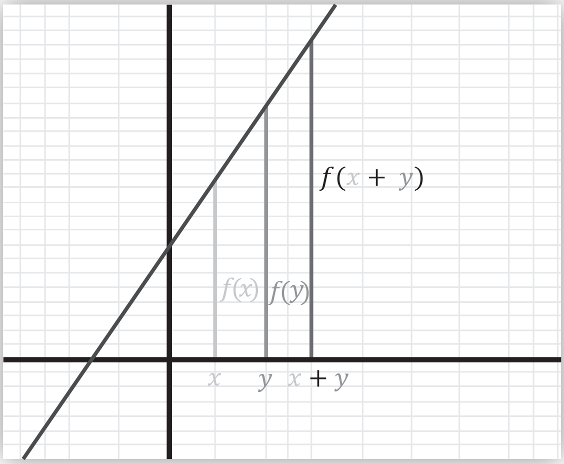


Figura 11. Argumentación gráfica:
para una funcion del tipo $y = mx + b, b \neq 0, f(x+y) \neq f(x) + f(y)$.

Por tanto, la presente actividad tiene la particularidad de que busca producir un debate sobre la utilidad o aplicabilidad de la "receta" trabajada con los estudiantes durante toda su educación básica:

> "Si es de proporcionalidad directa a medida que aumenta una magnitud, la otra también aumenta de manera proporcional".

Asimismo, se tiene una para la proporcionalidad inversa:

> "A medida que aumenta una magnitud, la otra disminuye".

Debemos aclarar que esto es válido, siempre y cuando la constante de proporcionalidad sobre la cual se trabaje sea positiva, pues de otro modo al ser negativa, ocurriría que esas afirmaciones no son válidas, como vimos con el ejemplo de la gráfica de la recta $y = -x$. ¿Por qué?

Actividad: Mr. Short — Mr. Tall

Veamos un nuevo ejemplo, que provoca otro tipo de conflicto.

El problema que presentaremos a continuación nos permitirá analizar, de manera directa, una de las grandes dificultades que exhiben los estudiantes ante tareas que exigen de un razonamiento proporcional. El ejemplo, es ampliamente conocido en la literatura especializada. Dicho problema se denomina *Mr. Short and Mr. Tall*.

Cuestion 2: La altura de “señor bajito” es 4 botones, mientras la altura de “señor alto” es 6 botones. Si usamos clips, la medida de “señor bajito” es de 6 clips.¿Cuál será la altura de “señor alto” medida con clips?

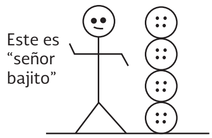


Figura 12. Mr. Short and Mr. Tall (Khoury, 2002, citado en Rivas *et al*. 2012).

A partir de este problema, se reconoce que hay dos tipos de estrategias de resolución: en las que se trabaja con el número de botones en la figura de menor tamaño comparada con el número de botones en la mayor, o la que trabaja con el número de botones para el número de clips en una sola figura. La primera es llamada “entre” (between) y corresponde a lo que se ha denominado como el trabajo con magnitudes extensivas, mientras que la segunda es llamada “dentro” (within) y corresponde a las magnitudes intensivas. La mayoría de los estudiantes optan por la estrategia denominada “entre” (Hart, 1988).

Intensive Quantities and the Present Research. From some perspectives, intensive quantities appear to provide a particularly attractive context for supporting rational number and proportional reasoning. As noted, intensive quantities are inherently proportional and relevant to both mathematics and science. Being proportional, intensive quantities require rational numbers for their linguistic representation.

Density, speed and temperature are typically represented as rates, e.g. mass per unit volume, miles per hour, heat energy per unit volume, and rates are widely conceptualized as a type of ratio (Lamon, 2007; Thompson, 1994). In fact, all intensive quantities can be represented using ratios, whilst a subset can also be represented using fractions, decimals and percentages. Specifically, the subset of intensive quantities that derives from mixture permits all forms of rational number, i.e. the intensity of a colour or the strength of a diluted chemical can be described as three parts water to one part chromatic dye/chemical, 3/4 water, 0.75 water or 75% water. An implication is that no matter which form is used, reasoning with intensive quantities requires understanding of rational number at two levels, first to represent the quantities and second to recognize the ratios on which proportional reasoning depends. Used appropriately, intensive quantities could therefore provide a rich instructional context. (Howe, Nunes and Bryant, p. 393)

Una de las posibles respuestas matemáticamente incorrecta es:

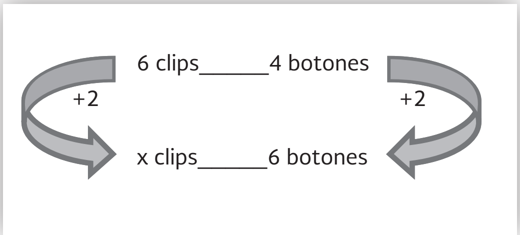


Figura 13. Error matemático de resolución.

La argumentación esgrimida para este tipo de respuestas se fundamenta en la siguiente suposición: que al sumar dos en una de las magnitudes, se habrá también que sumar lo mismo (misma cantidad) en la otra. Esta estrategia si bien busca conservar "algo", no mantiene la proporcionalidad entre las magnitudes, lo cual es evidente pues la razón entre botones y clips del "hombre bajo" sería $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, lo cual significa que por cada dos botones hay tres clips; mientras que en la del "hombre alto" esto sería $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$, lo que significaría que por cada tres botones hay cuatro clips, generando de este modo una contradicción... ¿Cuál?[3] Por tanto, se recomienda cuestionar cuál es la relación entre botones y clips para explorar la relación de proporcionalidad. Para ello, los dibujos resultan de gran ayuda al menos en un primer acercamiento (tratamiento icónico – cuantitativo).

[3] Una posible respuesta sería la siguiente: pues antes se había dicho que la relación era por cada dos botones había tres clips.

El problema plantea lo siguiente:

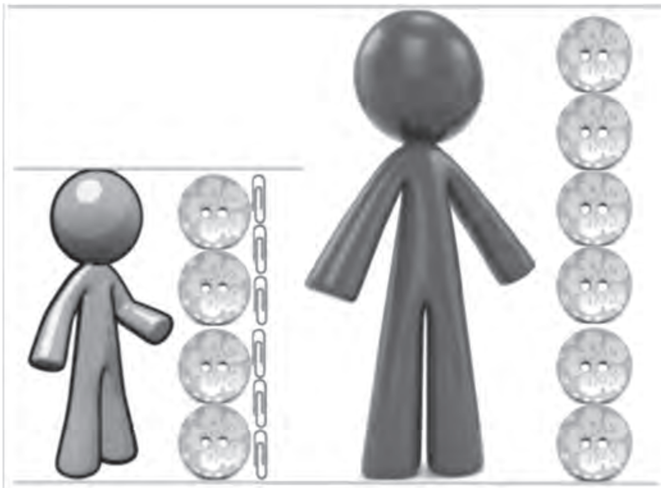


Figura 14. Representacion del problema.

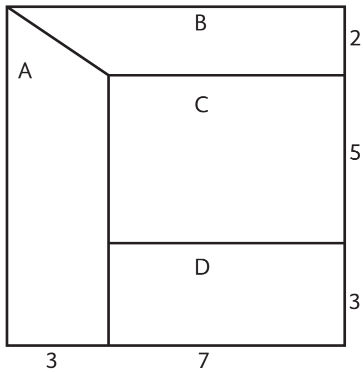
Las estrategias pueden ser diversas y lo interesante del asunto radica en escuchar la que brinden los propios estudiantes. Pueden plantearse estrategias como agregar “la mitad de la cantidad de botones” es decir, que se agregan sólo dos botones, por lo cual, habría que adicionar “la mitad de la cantidad de clips”, esto es, tres clips.

Asimismo, pueden argumentar que por cada dos botones se tienen tres clips, de lo cual, en el “hombre alto” al tener seis botones, se necesitarán 3×3 clips. También podría directamente utilizar la regla de tres simple, aunque en tal caso, será indispensable que se cuestione la relación entre las magnitudes para no reducirse al hallazgo de un valor, pues el enunciado propuesto busca producir una reflexión, una discusión, un discurso compartido.

Otro problema matemáticamente similar al anterior, en el cual pueden hacerse cuestionamientos de la misma índole, es ampliamente conocido como “Rompecabezas”, en donde la proporcionalidad aparecerá vinculada a la noción de semejanza.

Veamos la siguiente actividad:

Actividad: El rompecabezas



¿Puedes realizar un rompecabezas como éste, sólo que más pequeño? Pero no cualquiera, debe cumplir con que el lado que ahora mide 5, en el nuevo rompecabezas mida 4. De este modo, el nuevo rompecabezas será más pequeño. La actividad puede incluso plantearse con papel para recortar como etapa inicial de exploración.

Algunas indicaciones son necesarias: deben considerar las siguientes reglas:

- Debe conservarse la forma cuadrada del rompecabezas.
- El segmento que ahora mide 5, medirá en el nuevo 4.
- Piensen, ensayen y acuerden en equipo de trabajo. El tema es discutir cuáles serán las medidas que tendrá el rompecabezas.
- Cada pieza del rompecabezas tiene una letra a fin de identificarla, deberán anotar en una hoja las medidas que como equipo consideren tendrá cada una de las piezas.
- Las medidas de las piezas del rompecabezas deben ser las escritas en su hoja.

Ahora un nuevo reto será construir un rompecabezas con las características señaladas: que la medida de 5 en el original cambie a 8. Trabajando de la misma manera, primero tendrán que anotar en su hoja las medidas que tendrá el nuevo rompecabezas.

Actividad: ¿Por qué?

Otro tipo de actividades recurrentes en la clase de matemáticas es completar tabla de valores.

Un automóvil viaja a velocidad constante, algunas distancias y tiempos del recorrido se muestran en la tabla. Completa los datos que hacen falta en ella.

Tiempo (h)	1.5	3	5	
Distancia (km)		240		720

¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ¿Por qué? ____________________

¿Qué estrategias usaste para responder y justificar? ____________________

Figura 15. Actividad ¿Por qué?

Esta actividad tiene como finalidad discutir las estrategias utilizadas por sus estudiantes, para encontrar la constante de proporcionalidad. Como estrategia surge la reducción a la unidad a través de la regla de tres simple. Pocas veces surge que 240 entre 3 nos da el valor de la constante, lo cual se haría de manera directa considerando que "la velocidad es constante", pues este es justo el dato que asegura que se trata de una situación de proporcionalidad directa. Para completar la tabla trabajan el cuarto valor faltante, la igualdad de razones y el producto cruzado.

Completar la tabla

Tiempo (h)	1.5	2		
Distancia (km)		150	5	600

Figura 16. Interpretación de tabla de valores sin especificación.

Inmediatamente posterior a esto, se les coloca una tabla con valores cualesquiera sólo dando los valores de un par ordenado. Entonces, se les pedirá completar la tabla. El objetivo de esta situación es confrontarlos con lo que habitualmente aparece como modelo de la proporcionalidad: "toda tabla es de proporcionalidad". En realidad, en esta propuesta podría completarse de cualquier manera la tabla, ya que en ningún momento se enuncia que las magnitudes sean directamente proporcionales.

Esta actividad pretende colocar la esencia de la proporcionalidad como la relación que se mantiene constante entre las magnitudes, por encima de su representación en la tabla: no toda tabla de valores es de proporcionalidad directa, pues en el caso anterior se tenía la consigna de que iba a “velocidad constante”; sin embargo, en ésta, no se enuncia ese hecho.

e) Cada una de las tablas siguientes tienen dos columnas, la promera, la de la izquierda, la llamamos x y la segunda es el resultado de “ciertas operaciones” aplicadas a los valores que le corresponden a x y que debes descubrir.

x	
-2	7
-1.5	5.25
1.2	-4.2
3	-10.3

x	
-3.5	-2.5
-2	-1
0.5	1.5
4	5

x	
-2.5	-6.5
-0.5	-1.3
2	5.2
3.5	9.1

x	
-4	-2
-2.6	-1.3
1.2	0.6
6.4	3.2

i. ¿Cuáles de las expresiones algébraicas de la columna de la derecha corresponde a una relación de proporcionalidad derecta? ¿Por que? Comenta con tus colegas caáles son las estrategias que usaron para justificar la proporcionalidad.

ii. ¿Qué particularidad tienen las expreciones algebraicas que expresan relaciones proporcionales?

Figura 17. Actividad ¿Por qué? Tablas numéricas.

El objetivo de esta actividad es observar cuáles son las estrategias que siguen a fin de argumentar que las tablas de valores que se muestran representan una relación de proporcionalidad con números distintos a los naturales tanto en dominio como imagen (distinto a lo planteado en el inciso anterior.) Las estrategias más utilizadas son la búsqueda de la expresión algebraica (reflejado en un modelo de pensamiento multiplicativo), por lo cual, este hecho nos permite conjeturar que el tipo de pensamiento intra está subordinado en sus esquemas conceptuales ya que de poseerlo, éste sería mucho más eficaz como medio para probar que la razón entre los pares de ambas variables se mantiene constante. Por ejemplo, la primera de las tablas corresponde a una relación de proporcionalidad directa, pues la razón entre los pares de magnitudes se mantiene constante:

Tabla 1. Resolución tabla numérica.

x	$y = -3.5x$	Relación de proporcionalidad
-2	7	$7 \div -2 = -3.5$
-1.5	5.25	$5.25 \div -1.5 = -3.5$
1.2	-4.2	$-4.2 \div 1.2 = -3.5$
3	-10.5	$-10.5 \div 3 = -3.5$

En el siguiente caso se observa que si buscamos la razón entre los pares de magnitudes, ésta no es constante, por lo tanto, debe encontrarse otro tipo de relación entre las magnitudes, de donde se obtiene que es una relación lineal del tipo $y = mx + b$.

Tabla 2. Resolución tabla numérica.

x	$y = x + 1$	Relación de proporcionalidad
-3.5	-2.5	$-2.5 \div -3.5 = 0.715$
-2	-1	$-1 \div -2 = -0.5$
0.5	1.5	$-1.5 \div 0.5 = 3$
4	5	$5 \div 4 = 1.25$

f) Explica los siguientes algoritmos:

En una fábrica se consumen 16 toneladas de parafina cada dos meses para la elaboración de velas. ¿Cuántas toneladas se consumen al año?

2 meses ______ 16 toneladas

12 meses ______ $x = \frac{12 \text{ meses x } 16 \text{ toneladas}}{2 \text{ meses}} = 96$ toneladas

En una empresa trabajan con 15 máquinas, las cuales en 4 días realizan una producción de 1500 chalecos. Si mandamos a reparar 5 máquinas, ¿cuántos días terdarán en realizar la misma producción?

15 máquinas ______ 4 días

10 máquinas ______ $x = \frac{4 \text{ días x } 15 \text{ máquinas}}{10 \text{ máquinas}} = 6$ Días

Figura 18. Actividad ¿Por qué? Justificación de algoritmos.

Como se hizo explícito en actividades anteriores, la "regla de tres simple" puede surgir como una estrategia para resolverlas; sin embargo, en esta actividad se da la resolución y se pide que argumenten su propia estrategia. Es decir, con este hecho estamos problematizando ante sus alumnos el algoritmo utilizado en clase, buscando la esencia, aquello que le subyace. Un argumento posible radica en la igualdad de razones y el "producto cruzado".

Actividad: Comparando sucesos de la vida cotidiana

La presente actividad, si bien es extraída del libro de Cabañas, Cantoral, Farfán y Ferrari (2013) para secundaria, es una actividad que logra sintetizar cuál es el trabajo con la proporcionalidad tanto directa como inversa y la función lineal. Veamos paso a paso las reflexiones.

Compararemos los siguientes sucesos de la vida cotidiana: la distancia que recorre un auto en un tiempo dado, el costo de un viaje en bus y cómo va acortándose una vela encendida.

a. Un vehículo se desplaza a velocidad constante.

i. Completa la tabla e indica si este suceso representa una relación de proporcionalidad. Si tu respuesta es sí, ¿es una relación de proporcionalidad directa o inversa? En grupo justifiquen sus respuestas.

Velocidad (km/h)						
Tiempo (h)	2	2.5	3			4.25
Distancia (km)			270	337.5	360	

ii. ¿Cuál es la velocidad a la que se desplaza el vehículo?

iii. Formen grupos de tres compañeros y comenten las distintas estrategias para encontrar la velocidad. Justifiquen sus respuestas.

iv. Si consideramos que y es la cantidad de kilómetros recorridos, y que x es la cantidad de horas empleadas, ¿cómo se relacionan estas cantidades con la velocidad?

v. ¿Por qué se puede asegurar que la velocidad es constante? ¿Puedes encontrar una relación entre ésta y la constante de proporcionalidad? Comenta con tus compañeros y argumenten sus respuestas.

En esta situación se pretende trabajar con la idea de proporcionalidad directa. Dado que previamente fue discutida sobre base de especificar que la tabla representa o no una relación de proporcionalidad. Se discutirá sobre el tipo de enunciado, en el cual, se aclara que el vehículo se desplaza a una velocidad constante (como en el primero de los casos), por lo cual, la discusión debería trabajarse respecto al significado de velocidad como algo cotidiano y a la idea de "situación ideal", pues se debe generar la idea de ser un tanto críticos en el aula y pensar que si realmente éste fuera un auto, no cabría en tal caso la posibilidad de que durante 4 horas el auto no cambiara su velocidad.

Como podrá observarse, luego de completar la tabla, las preguntas versan sobre "la relación" y no sobre "las cantidades". La respuesta que se espera, más allá de que la relación sea que ambos aumentan, es que **su razón se mantiene constante** $\frac{y}{x} = k$.
Así, la última pregunta pretende analizar la situación en su conjunto: la constante de proporcionalidad y el significado que se le da dentro del problema.

b. Una empresa que renta un autobús con una capacidad para 30 personas, brinda una lista de precios, ¿cuál es el costo del microbús?

i. Completa la tabla e indica si este suceso representa una relación de proporcionalidad. Si tu respuesta es sí, ¿es una relación de proporcionalidad directa o inversa? En grupo justifiquen sus respuestas.

Cantidad total del precio de la renta de autobús							
Cantidad de pasajeros	8		12	16		28	30
Cantidad de precio por pasajero	$400.00			$250.00	$200.00	$142.85	$133.33

ii. ¿De cuánto dinero es la renta del autobús? Justica tu respuesta.

iii. Formen grupos de tres compañeros y comenten las distintas estrategias para encontrar la cantidad de dinero que es la renta. Justifiquen sus respuestas.

iv. ¿Qué relación existe entre la cantidad pasajeros y la cantidad del precio de la renta del autobús? Si llamamos y a la cantidad de pasajeros, y x a la cantidad de precio por pasajero, ¿cómo se relacionan estas variables con la cantidad del precio de la renta del autobús?

En esta situación se pretende trabajar sobre la idea de proporcionalidad inversa y las preguntas tienen los mismos objetivos que la anterior, haciendo la diferencia que en este caso, **el producto entre los pares de valores de las magnitudes se mantiene constante $y \cdot x = k$.**

c. Una vela se consume a medida que transcurre el tiempo.

i. Completa la tabla e indica si este suceso representa una relación de proporcionalidad. Si tu respuesta es sí, ¿es una relación de proporcionalidad directa o inversa? En grupo justifiquen sus respuestas.

Relación											
Tiempo (min)	5	10	15			45	60	75	90		120
Long. de la vela (cm)	24		22	21	19		13			5	1

ii. ¿Cuánto disminuye la longitud o largo de la vela cada vez que aumenta 5 minutos?

iii. ¿Qué relación existe entre la cantidad de minutos y la longitud de la vela? Comenta con tus compañeros y argumenten sus respuestas.

Si bien las primeras dos situaciones tratan sobre proporcionalidad directa e inversa de una manera “evidente”, en esta otra situación se pone en conflicto de la siguiente manera:

- Si suponemos que es de proporcionalidad inversa porque una magnitud aumenta y la otra disminuye (lo que al comienzo era la argumentación más relevante), por el trabajo realizado durante las interacciones sabemos que en una relación de proporcionalidad inversa se cumple que $y \cdot x = k$, por lo cual, el producto de las magnitudes de cada par ordenado debe dar constante. Al probarlo, se genera una contradicción, pues se comprueba que “no dan” constantes, por lo cual se descarta el hecho de que se trate de una proporcionalidad inversa. También podría hacerse una gráfica y verificar que esta no es una hipérbola, por lo cual no podría considerarse como una relación de proporcionalidad inversa (esto es lo que genera suponer la siguiente).

- Si al graficarla en el plano cartesiano, observamos que se trata de una recta, se podría suponer que es una relación de proporcionalidad directa, entonces, debería cumplir con la relación $\frac{y}{x} = k$, pero al buscar dichas razones, se observa que no es de proporcionalidad directa, pues sus razones no se mantienen constantes. Pero al ser su gráfica una recta, tampoco puede ser de proporcionalidad inversa.

Es hasta aquí en donde las características de la proporcionalidad están por encima del tipo de pensamiento cualitativo y se ponen en juego los fundamentos de la proporcionalidad directa e inversa:

- Proporcionalidad directa: **la razón entre los pares de valores de las magnitudes se mantiene constante** $\frac{y}{x} = k$
- Proporcionalidad inversa: **el producto entre los pares de valores de las magnitudes se mantiene constante** $y \cdot x = k$**.**

Por último, se habrá de colocar en conflicto las afirmaciones comunes que se realizan respecto a la proporcionalidad y sus características:

d. Buscando diferencias y similitudes entre los tres sucesos

Teniendo en cuenta lo que has resuelto hasta ahora, contesta verdadero o falso según corresponda y justifica cada una de tus respuestas.

i. Todos los sucesos que representen una relación de proporcionalidad inversa tienen la particularidad de que cuando una magnitud aumente, la otra disminuye (o viceversa). <u>FALSO</u>

ii. Siempre que en un suceso una magnitud aumente y la otra disminuya (o viceversa), es una relación de proporcionalidad inversa. <u>FALSO</u>

iii. Para encontrar la constante de proporcionalidad de una relación inversamente proporcional debemos buscar el cociente entre un par de magnitudes. <u>FALSO. La proporcionalidad inversa refiere al producto entre los pares de magnitudes.</u>

iv. Para encontrar la constante de proporcionalidad de una relación directamente proporcional debemos buscar el producto entre un par de magnitudes. FALSO. La proporcionalidad directa refiere a la razón entre los pares de magnitudes.

El pensamiento cualitativo correspondiente a la proporcionalidad directa "a más-más", o a la proporcionalidad inversa como "a más-menos", como dijimos párrafos atrás, sólo puede usarse para constantes positivas.

En la función de proporcionalidad inversa, del tipo $y = \frac{k}{x}$:

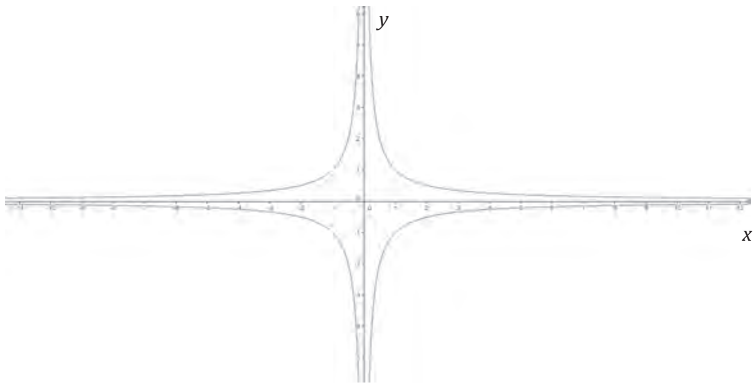


Figura 19. Gráficas posibles de una función de proporcionalidad inversa.

En este caso, aunque sea una relación de proporcionalidad inversa, en el caso de $k < 0$, a medida que aumenta x también aumenta y.

En la función de proporcionalidad directa del tipo $y = kx$:

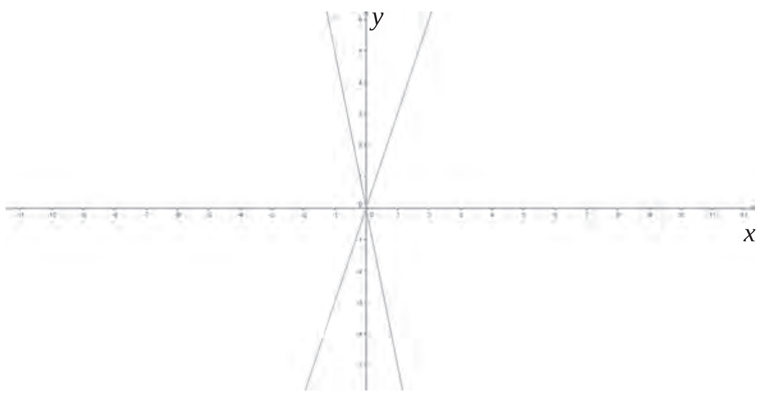


Figura 20. Gráficas posibles de una función de proporcionalidad directa.

En este caso, cuando $k < 0$, se cumple que “a medida que aumenta x, disminuye y”, y sin embargo, sigue siendo una relación de proporcionalidad directa.

Actividad: Estimación de personas en una manifestación [4]

Figura 21. Imagen de una manifestación para estimar la cantidad de personas.

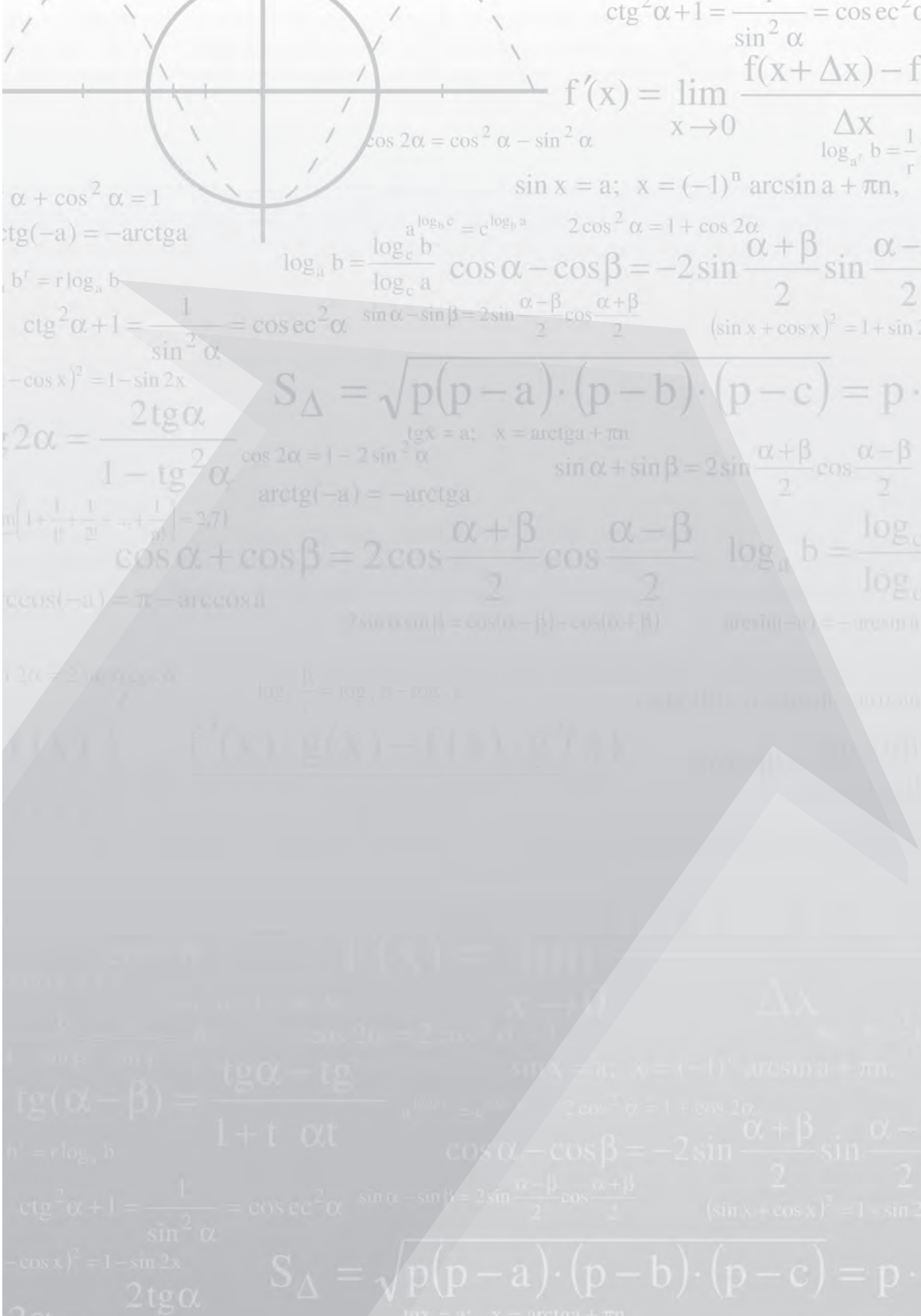
Usualmente, los periodistas estiman el número de personas que participan en manifestaciones y desfiles. Veamos un ejemplo: se informó una manifestación política en un programa de televisión. El periodista se unió a la multitud y dijo: “La plaza está llena de manifestantes. Al menos 200,000 personas están aquí y también en las calles cercanas.” Al mismo tiempo, otro periodista, en una estación de radio, reveló: “La policía anunció que 100,000 personas participan de la manifestación y que se mantiene el orden. Responda las siguientes preguntas:

- a. ¿Por qué, si ambos periodistas estaban en el mismo lugar, relatando el mismo acontecimiento, hubo una diferencia significativa en relación a la estimación del número de personas presentes en la manifestación?
- b. En su opinión, ¿cómo hicieron los periodistas las estimaciones sobre el número de personas presentes en la manifestación?
- c. Proponga un método con que los periodistas obtuvieran una mejor estimación del número de personas presentes en la manifestación.

---

[4] Actividad retomada de (Ben-Chaim, Ilany y Keret, 2008). Traducción libre de la propuesta original. En esta propuesta se podrán encontrar diversos problemas que contemplan la cotidianeidad de los alumnos.

Los colegas israelitas BenChaim, Ilany y Keret (2007,2008) realizan una propuesta novedosa de actividades investigativas auténticas en donde retoman situaciones de la cotidianeidad de los individuos y ponen en juego la noción de proporcionalidad, tanto directa como inversa. Como puede observarse, en esta situación no se pretende que los estudiantes pongan en juego algoritmos sino estimaciones a partir de la comparación.


$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f}{\Delta x}$
$\sin x = a; \ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$
$\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-}{2}$
$\mathrm{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \mathrm{cosec}^2\alpha$
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)} = p\cdot$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctga}$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

4. ALGUNAS SUGERENCIAS... ¿USTED QUÉ HARÍA?

Como dijimos al comienzo de este libro, la mirada de la Socioepistemología pretende cuestionar al propio saber matemático para que, desde allí, los docentes puedan transformar su realidad áulica.

Como se podrá observar, el foco de discusión estuvo en el propio saber matemático. De allí, la hipótesis de partida señala que para lograr una profunda mejora en la práctica docente derivada de programas institucionales de formación no basta con propiciar reflexiones al nivel didáctico-pedagógico, sino que debe incorporarse de manera germinal, profunda, una problematización del saber matemático escolar. Esto será realmente posible al incorporar en dichos programas a los docentes en un proceso que pone en discusión la naturaleza del saber matemático con el cual trabajan a diario. Que cuestionen y analicen los fundamentos y procesos matemáticos de donde se derivan los algoritmos, reconozcan los diversos desarrollos del pensamiento que subyacen a su construcción, es decir, las distintas formas de argumentación, y privilegien la vida misma del que aprende favoreciendo la aparición de diversas racionalidades contextualizadas y, así, el saber adquiera un estatus funcional.

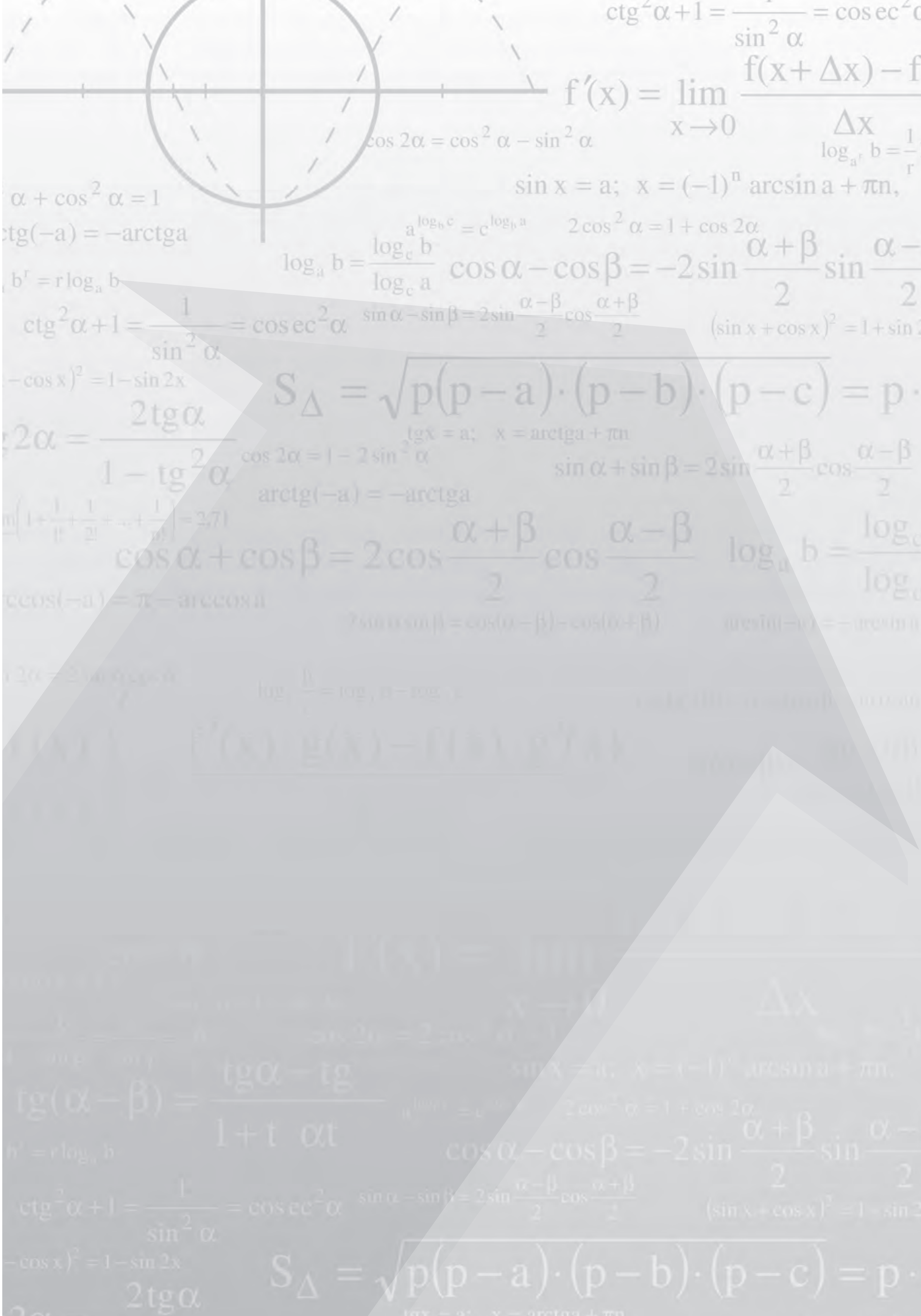
Es por esto que para dar cierre a este texto, presentamos un cuadro en donde se observan las características identificadas en la investigación respecto al discurso Matemático Escolar actual; los principios de la Socioepistemología y la propuesta para un nuevo discurso Matemático Escolar que se sustente en los principios de la Socioepistemología.

Tabla 3: Cuadro de relación discurso matemático escolar actual. Principios de la Socioepistemología y nueva propuesta (Reyes-Gasperini, 2011, p. 65).

Discurso Matemático Escolar actual (Soto, 2010)	Principios de la Socioepistemología (Cantoral, 2011,2013)	Propuesta de discurso Matemático Escolar
CARÁCTER UTILITARIO	**NORMATIVA DE LA PRÁCTICA SOCIAL**	**CARÁCTER FUNCIONAL**
La organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades. Se busca que el conocimiento tenga un carácter funcional, en el sentido que logre integrar tal conocimiento a la vida para transformarla.	La normativa de las actividades y las prácticas.	La matemática escolar se organiza con base en el saber y el funcionamiento cognitivo, didáctico, epistemológico y social en la vida de los seres humanos, reconocimiento a las prácticas sociales en la base, de la creación del conocimiento.
ATOMIZACIÓN EN LOS CONCEPTOS	**RACIONALIDAD CONTEXTUALIZADA**	**RACIONALIDADES CONCEPTUALES DIVERSAS**
No considera los aspectos sociales, contextuales y culturales que permiten la cons constitución del conocimiento.	La relación al saber es una función contextual.	Se reconocen, privilegian y potencian diversos tipos de racionalidad relativos a la realidad en la que el individuo se encuentre en un momento y lugar; desde el cual se construirá conocimiento.
CARÁCTER HEGEMÓNICO	**RELATIVISMO EPISTEMOLÓGICO**	**VALIDACIÓN DE SABERES (CONOCIMIENTOS CONSTRUIDOS)**
Supremacía de argumentaciones y significados frente a otras. Conocimiento acabado y continuo. Lo que ha generado que la enseñanza de la matemática sea reducida a la mecanización de procesos o memorización de los conceptos.	La validez del saber es relativa al individuo y al grupo cultural.	La matemática escolar tiene diversas maneras de verse, trabajarse, construirse y desarrollarse, concibiendo que la validez del saber es relativa al individuo y al grupo cultural en la cual éste ha emergido y respecto a la racionalidad contextualizada que éste posea.
FALTA ARCOS DE REFERENCIA PARA LA RESIGNIFICACIÓN	**RESIGNIFICACIÓN PROGRESIVA**	**PLURALIDAD DE PRÁCTICAS DE REFERENCIA PARA LA RESIGNIFICACIÓN**
Se ha soslayado el hecho de que la matemática responde a otras prácticas de referencia y por tanto es ahí donde encuentra una base de significados naturales.	La significación no es estática, es funcional, relativa y contextual.	La pluralidad de prácticas de referencia, su interacción con diversos contextos y la propia evolución de la vida del individuo o grupo resignificarán los saberes hasta el momento construidos, enriqueciendolos de nuevos significados.

El cuadro pretende brindar una posible guía de reflexión para las temáticas que los docentes deseen cuestionarse y atreverse a rediseñar. Pues ya se ha comenzado a evidenciar que serán los docentes los grandes protagonistas de la transformación matemática escolar.

Habiendo reflexionado durante este apartado sobre la problematización del saber, ejemplificada desde la proporcionalidad, no nos queda más que “pasar la pelota” y preguntarle… ¿Usted que haría? Ese accionar será interesante e importante, pues es el la consolidación en los actos que se espera que estas líneas se vean reflejadas.



ctg²α+1 = 1/sin²α = cosec²α
f′(x) = lim x→0 (f(x+Δx) − f(x))/Δx
cos 2α = cos²α − sin²α
sin x = a; x = (−1)ⁿ arcsin a + πn,
sin²α + cos²α = 1
arctg(−a) = −arctga
2cos²α = 1 + cos 2α
log_a b = log_c b / log_c a
cos α − cos β = −2sin (α+β)/2 sin (α−β)/2
sin α − sin β = 2sin (α−β)/2 cos (α+β)/2
S_Δ = √(p(p−a)·(p−b)·(p−c))
tg2α = 2tgα/(1 − tg²α)
tgx = a; x = arctga + πn
cos 2α = 1 − 2sin²α
sin α + sin β = 2sin (α+β)/2 cos (α−β)/2
cos α + cos β = 2cos (α+β)/2 cos (α−β)/2

Semblanza
Profa. Daniela Reyes-Gasperini, Candidata a doctora

La maestra Daniela Reyes-Gasperini nació en la ciudad de Buenos Aires, República Argentina. Actualmente desarrolla sus estudios doctorales en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav–IPN, donde además concluyó la maestría en Ciencias con la especialidad en Matemática Educativa. Realizó sus estudios de profesora de Matemática en el Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" de Buenos Aires, Argentina.

Entre sus experiencias profesionales y académicas se cuenta el haber sido profesora de la maestría en la Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria del IEEPO, durante el año 2012. Este posgrado depende de la Coordinación General de Educación Básica y Normal del Departamento de Formación y Actualización de Docentes Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca en convenio con el Cinvestav, profesora titular del Seminario Matemáticas, formación docente y transversalidad: el caso de la proporcionalidad, Oaxaca, México. Durante los años 2008-2009 fue docente suplente de matemática en Buenos Aires, Argentina.

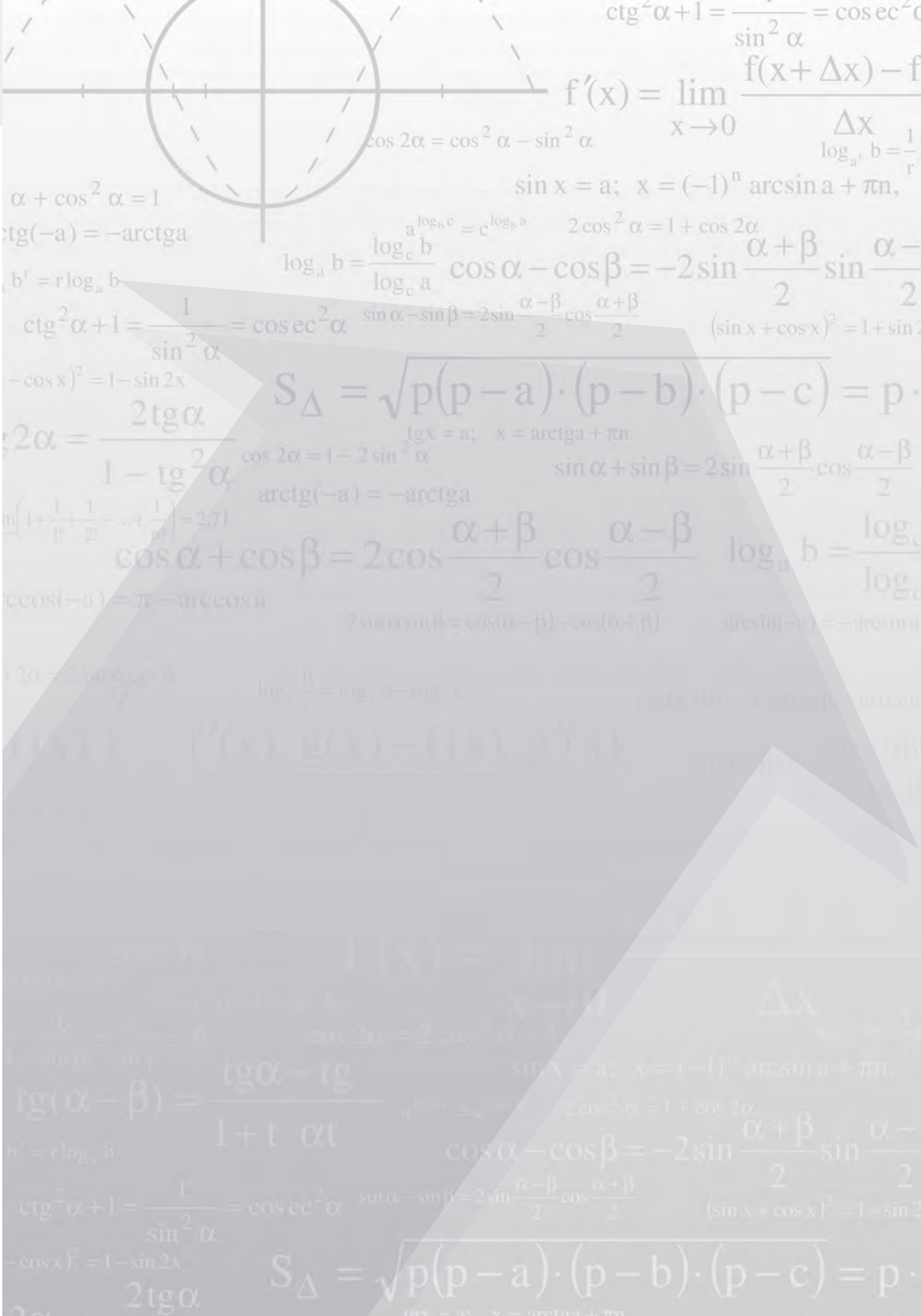
A la par de sus estudios de posgrado, tuvo la responsabilidad, en el año 2013, de ser tutora del Diplomado Desarrollo de Estrategias de Aprendizaje para las Matemáticas del Bachillerato: La transversalidad Curricular de las Matemáticas. Entre los años 2010 a 2012 fungió como representante del equipo coordinador de la Especialización de Alto Nivel para la Profesionalización Docente en las Matemáticas de Secundaria. Estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas. Ambos proyectos del Cinvestav en convenio con la SEP México.

Entre sus publicaciones más representativas en revistas indizadas se encuentran los siguientes títulos: (2013) *Socioepistemología y empoderamiento docente: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático;* (2012) *0.167* Editorial de Relime; (2012) *Matemáticas y práctica social: Construcción social del conocimiento matemático y en* (2010) *Reflexiones acerca del aula actual como desafío para el profesor de matemática.*

Ha tenido una prolífica participación al nivel de congresos nacionales e internacionales, citemos los siguientes: Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Brasil, Cuba, Argentina y Guatemala); III Congreso Internacional y VIII Nacional de Investigación en Educación, Pedagogía y Formación Docente (Colombia); III Congreso Internacional y VIII Nacional de Investigación en Educación, Pedagogía y Formación Docente (Argentina); Conferencia Argentina de Educación Matemática (Argentina); Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana (México).

Ha sido colaboradora en diversos proyectos autorales para la enseñanza de las matemáticas y para la profesionalización docente. Podemos citar entre ellos: *Guía para el Maestro – Matemática II* Serie Desarrollo del pensamiento matemático publicado por McGraw Hill Ediciones. *Profesionalización docente en matemáticas. El empoderamiento docente:* una mirada emergente, México: Ediciones Díaz de Santos. Fue invitada a elaborar un capítulo de libro: *Empoderamiento docente: La práctica docente más allá de la didáctica…* ¿qué papel juega el saber en una transformación educativa? *El caso del empoderamiento docente* en Investigaciones sobre el Conocimiento profesional y Desarrollo profesional del profesor en matemáticas y ciencias, Madrid: Paidós. Ha sido colaboradora académica en la elaboración de los libros de texto de Matemáticas III, II y I, serie de Desarrollo del Pensamiento Matemático, México: McGraw Hill.

Es la responsable de la coordinación técnica de la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*–Relime, revista indizada en ISI Web, Conacyt, ERIH, SciELO, Qualis, Scopus Elsevier, entre otras. Así mismo, es colaboradora permanente en la revisión de propuestas para el *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* ambas publicaciones del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa–CLAME, del cual es miembro regular. dreyes@ cinvestav.mx



$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f}{\Delta x}$
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
$\sin x = a; \ x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$
$\alpha + \cos^2 \alpha = 1$
$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctga}$
$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$
$2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin$
$\mathrm{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \mathrm{cosec}^2\alpha$
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)} = p$
$\mathrm{tg}x = a; \quad x = \mathrm{arctg}a + \pi n$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctga}$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

Referencias bibliográficas

Ball, D., Thames, M.; Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education 59* (5), 389–407.

BenChaim, D.; Ilany, B. S.; Keret, Y. (2007). Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: the impact on preservice mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. *Journal Mathematics Teacher Education* 10, 333–340.

BenChaim, D.; Ilany, B. S.; Keret, Y. (2008). "Atividades Investigativas Autênticas" para o Ensino de Razão e Proporção na Formação de Professores de Matemática para os Níveis Elementar e Médio. *Boletim de Educação Matemática 21*(31), 125–159.

Cabañas, G., Cantoral, R., Farfán, R., Ferrari, M. (2013). *Matemáticas 2. Serie para la educación secundaria: Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: McGraw Hill.

Cantoral, R. (2011). *Fundamentos y métodos de la Socioepistemología*. Simposio en Matemática Educativa, 22–26 de agosto del 2011. México: Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. [Disponible http://www. youtube. com/watch?v=byHKKFnAq5Y]

Cantoral, R. (2013, en prensa). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios de construcción social del conocimiento*. México.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. (2012). Matemáticas y práctica social: Construcción social del conocimiento matemático. *Novedades educativas 261*, 60-65.

Carreteto, L. (1989). La adquisición de la noción de proporcionalidad según diferentes tipos de estructuras multiplicativas por el niño de 8 a 11 años. *Anuario de Psicología* 42(3), 85–101.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico (trad. Ricardo Barroso Campos). *Recherches en Didactique des Mathématiques 19*(2), 221–266.

Contreras, L.; Carrillo, J.; Zakaryan, D.; MuñozCatalán, M.C.;

Climent, N. (2012). Un estudio exploratorio sobre las competencias numéricas de los estudiantes para maestro. *Boletim de Educação Matemática 26*(42B), 433–457.

Da Ponte, J.; Quaresma, M.; Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de matemática. Avances de *Investigación en Educación Matemática 1*(1), 65–86.

Euclides (1991). *Elementos. Libros I–IV* (Trad. M. L. Puertas Castaños). Madrid, España: Gredos.

Gellert, U.; Becerra, R.; Chapman, O. (2013). Research Methods in Mathematics Teacher Education. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. KeitelKreidt, J. Kilpatrick & F.K.S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 27), Nueva York: Springer International. pp. 327–360.

Godino, J. D.; Batanero, C. (2002). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*. España, Granada: Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

Guacaneme, É. A. (2012). Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos. O.L. León (Ed.), *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático.* Bogotá, Colombia: Fondo de Publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas. pp. 99–135.

Hart, K. (1988). Ratio and Proportion. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.198–219). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Howe, Ch., Nunes, T., Bryant, P. (2010). Rational number and proportional reasoning: using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science. *International Journal of Science and Mathematics Education 9*, 391–417.

Inhelder, B., Piaget, J. (1972). El equilibrio de la balanza. En B. Inhelder y J. Piaget (Ed.), *De la lógica del niño a la lógica del adolescente. Ensayo sobre la construcción de las estructuras operatorias formales*. Buenos Aires: Paidós. pp. 142–155.

Lamon, S. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children´s Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education 24*(1), 41–61.

Lamon, S. (1999). Reasoning Proportionally. In S. Lamon (Ed.), Teahcing fractions and rations for understanding. Nueva Jersey, EU: Lawrence Erlbaum Associates Publishers. pp. 223–238.

Llinares, S., Valls, J., Roig, AI. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática 20*(3), 59–82.

Piaget, J., Inhelder, B. (1977). El preadolescente y las operaciones proposicionales. En J. Piaget y B. Inhelder (Ed.), *Psicología del niño* (7a ed.) Madrid: Ediciones Morata. pp. 131 – 150.

Reyes–Gasperini, (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas*. Tesis de maestría no publicada. México: Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados.

Reyes–Gasperini, D., Cantoral, R. (2011). El proceso de empoderamiento docente en el campo de las matemáticas. En A. R. Corica, M. P. Bilbao y M. P. Gazzola (Eds.), *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática – II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática*. Argentina: Universidad Autónoma del Centro de la Provincia de Buenos Aires. pp. 413 – 419.

Rivas, M., Godino, J. D., Castro, W. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Boletim de Educação Matemática 26*(42B), 559 – 588.

Roa, A. (2010). *La ecuación funcional de Cauchy f(x+y)=f(x)+f(y) y algunas de sus aplicaciones*. Tesis de Maestría no publicada, Mérida, Venezuela: Universidad Autónoma Abierta.

SEP (2004). *Libro para el Maestro. Matemáticas. Educación secundaria*. (2ª reimpresión) D.F., México: Secretaría de Educación Pública. pp. 88–105.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión.*

Una visión Socioepistemológica. Tesis de Maestría no publicada, México: Cinvestav.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherchers en Didactiques des Mathématiques 10*(2), 133 – 170.

Se terminó de imprimir y encuadernar en diciembre de 2013
en Impresora y Encuadernadora Progreso, S. A. de C. V. (IEPSA),
Calzada San Lorenzo 244; C.P. 09830, México, D. F.
El tiraje fue de 10,000 ejemplares.

ISBN: 978-607-9362-01-0
9 786079 362010

SEP
SECRETARÍA DE
EDUCACIÓN PÚBLICA

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR www.sems.gob.mx