LENGUAJE GRÁFICO DE FUNCIONES

Elementos de precálculo

ROSA MARÍA FARFÁN

Con la colaboración de
Mayra Báez
y María del Socorro García

SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

LENGUAJE GRÁFICO DE FUNCIONES. ELEMENTOS DE PRECÁLCULO

Rosa María Farfán

Investigadora de DME-Cinvestav

con la colaboración de

Mayra Báez y María del Socorro García

del DME-Cinvestav

Ricardo Cantoral Uriza
Coordinador de la Serie

Primera edición, 2013

Subsecretaría de Educación Media Superior
Argentina # 28 Col. Centro Histórico, Del. Cuauhtémoc
México, Distrito Federal

ISBN: 978-607-9362-04-1

Impreso en México

CONTENIDO

PRÓLOGO

Estimada profesora, estimado profesor:

Como parte de una estrategia de largo plazo para la profesionalización docente en el campo de las matemáticas, el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) y la Subsecretaría de Educación Media Superior de la SEP, diseñaron un plan para elaborar estos materiales dirigidos a las y los profesores de Matemáticas del país. En un segundo momento, con la colaboración de la red de egresados de Matemática Educativa y el apoyo de la Sociedad Matemática Mexicana, llevaremos a cabo mesas, foros, seminarios, cursos y diplomados mediante un Plan Nacional para la Profesionalización Docente en las Matemáticas Escolares.

Quienes estamos interesados en el aprendizaje de las matemáticas no podemos reducir los conceptos a sus definiciones, ni limitar las experiencias didácticas a la repetición memorística de algoritmos y resultados. Aprender matemáticas no puede limitarse a la mera copia del exterior a través de resultados previamente elaborados, o digamos que, a su duplicado; sino más bien, es el resultado de construcciones sucesivas cuyo objetivo es garantizar el éxito ante una cierta situación de aprendizaje.

Una consecuencia educativa de este principio consiste en reconocer que tenemos todavía mucho que aprender al analizar los propios procesos de aprendizaje de nuestros alumnos; nos debe importar, por ejemplo, saber cómo los jóvenes del bachillerato operan con los números, cómo entienden la pendiente de una recta, cómo construyen y comparten significados relativos a la noción de función o proporcionalidad, o cómo se explican a sí mismos nociones de azar. Esta visión rompe con el esquema clásico de enseñanza según el cual, el maestro enseña y el alumno aprende. Estos textos se diseñaron para ayudar al docente a explorar y usarlos para una enseñanza renovada aprovechando las formas naturales en que los estudiantes razonan sobre matemáticas y sobre lo que aporta a este respecto la investigación en Matemática Educativa.

El papel del profesor en esta perspectiva es mucho más activo y propositivo, pues sobre él o ella recae más la responsabilidad del diseño y coordinación de las situaciones de aprendizaje. Actualmente se considera al profesor como un profesional reflexivo, que decide, diseña, aplica y experimenta estrategias de acción para lograr el aprendizaje de sus alumnos. De manera que aprender matemáticas no se reduce a recordar fórmulas, teoremas o definiciones para resolver problemas mediante la imitación de las explicaciones del profesor en clase o con apego a los métodos ilustrados en los textos escolares.

Los resultados de las pruebas nacionales de corte masivo, utilizadas con fines de investigación, permitirían saber cuáles conceptos y procesos requieren todavía adaptaciones progresivas con el fin de mejorar su aprendizaje. Si bien los últimos resultados de las pruebas de logro académico estandarizadas muestran un incremento en el porcentaje de la población estudiantil con resultados satisfactorios y un decremento en el complemento, aún falta mejorar la atención en algunas temáticas particulares.

Gracias a la labor que lleva a cabo el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, a través de sus profesores, egresados e investigadores en formación, sabemos cuáles asuntos, de naturaleza transversal, resultan fundamentales para el aprendizaje de las matemáticas y de las ciencias, como puede ser el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, la constitución de un lenguaje gráfico para las funciones, el desarrollo del pensamiento trigonométrico, el pensamiento proporcional y el pensamiento estadístico. Estos asuntos siguen siendo un reto de la mayor importancia para mejorar los aprendizajes entre los estudiantes del bachillerato mexicano.

Por esta razón, los cinco volúmenes de esta colección fueron pensados para el docente de matemáticas. Su lectura, análisis y discusión permitirá mejorar los procesos de aprendizaje matemático. Los títulos de los textos de la serie son los siguientes:

Vol. 1 - *Lenguaje gráfico de funciones. Elementos de precálculo*

- Rosa María Farfán Márquez

Vol. 2 - *Desarrollo del pensamiento trigonométrico*

- Gisela Montiel Espinosa

Vol. 3 - *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*
- Ricardo Cantoral Uriza

Vol. 4 - *La transversalidad de la proporcionalidad*

- Daniela Reyes Gasperini

Vol. 5 - *Elementos de estadística y su didáctica a nivel bachillerato*

- Ernesto Sánchez Sánchez

Según la profesora Régine Douady, *saber matemáticas* precisa de dos aspectos. Por un lado, se refiere a la disponibilidad funcional de nociones y teoremas matemáticos para enfrentar problemas e interpretar nuevas situaciones. En este proceso, dichas nociones y teoremas tienen un estatus de herramienta, en tanto que sirven para que alguien actúe sobre un problema en determinado contexto. Por otra parte, también significa identificar a las nociones y a los teoremas como parte de un cuerpo de conocimientos reconocidos socialmente. Es ahí donde se formulan definiciones, se establecen relaciones entre nociones mediante teoremas y se prueban las conjeturas adquiriendo entonces el estatus de objeto. Al adquirir ese estatus, están descontextualizados y despersonalizados para permitir su aprendizaje. Este proceso de descontextualización y despersonalización participa del proceso de apropiación del conocimiento. Por su parte, para un profesor enseñar se refiere a la creación de las condiciones que producirán la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes. Para éstos, aprender significa involucrarse en una actividad intelectual cuya consecuencia final sea la disponibilidad de un conocimiento con su doble estatus de herramienta y de objeto. Para que haya aprendizaje y enseñanza es necesario que el conocimiento sea un objeto importante, casi esencial, de la interacción entre el profesor y sus alumnos.

Ésta es pues la primera de una serie de iniciativas coordinadas para la mejora de la educación en el campo de las matemáticas del bachillerato. No me resta más que animarles a estudiar y discutir los materiales que ahora tienen en sus manos, el camino es largo, pero iremos juntos ...

Dr. Ricardo Cantoral Uriza

Jefe del Departamento

Matemática Educativa – Cinvestav

INTRODUCCIÓN

Actualmente contamos con múltiples investigaciones concernientes al aprendizaje de las matemáticas. Una de las razones es el aumento en el número de estudiantes de todas las áreas que cursan matemáticas como consecuencia de los cambios que los gobiernos establecen; empero, los objetivos que señalan están lejos de cumplirse. Las reformas se suceden unas a otras generando la sensación de que el fondo de los problemas no se ha afrontado realmente.

Tomemos como ejemplo la experiencia de la década de 1970, la famosa "reforma de las matemáticas modernas", cuyo punto nodal fue la introducción del rigor ligado a la consideración del "alumno-niño" que conllevó a que los reformadores la impulsaran sobre dos supuestos ilusorios:

- Primero, la ilusión lírica. Las ciencias y las matemáticas podrían introducirse poco a poco sobre una espléndida arquitectura simple y elegante. Esta "belleza" era escondida a las jóvenes generaciones por una "mala" pedagogía que les ocultaba su potencia. Luego entonces, la profunda estructura de la ciencia se presentaría a los estudiantes tan pronto fuese posible y todo iría mejor.
- Enseguida la ilusión romántica. Concerniente a la manera en cómo aprenden los alumnos. Por analogía, ellos son como la planta que "crece sola" si se le coloca en un "buen ambiente", es decir, el movimiento espontáneo de la evolución cognitiva del estudiante dirige y se antepone al conocimiento científico. Las dificultades se atribuyen al arcaísmo pedagógico que cultiva "la ruptura con la vida real", el "formalismo" y el "dogmatismo" y por tanto criticado sin consideración.

Los resultados son bien conocidos y puede desprenderse como lección histórica, que siempre que las reformas se basan en presupuestos *a priori*, lo que sucede con mayor frecuencia de lo que se piensa, han provocado grandes decepciones. Producto del fracaso de la reforma de las matemáticas modernas, surgió otro punto de vista "fatalista" de retorno al pasado, como el movimiento norteamericano “back to basics”. Otro aspecto que las reformas no suelen considerar es el cómo aprenden los estudiantes y el cómo educar con equidad a una población indiscutiblemente heterogénea.

La matemática educativa nace como disciplina científica sobre presupuestos radicalmente opuestos a otras aproximaciones que conciernen a la enseñanza: la voluntad (y la afirmación de la posibilidad) de tratar razonable, sistemática, y científicamente, y con especificidad los fenómenos de aprendizaje de las matemáticas. Arriesgando una definición uno podría decir que la matemática educativa es la ciencia que estudia, para un campo particular (las matemáticas), los fenómenos de su aprendizaje, las condiciones de la transmisión de la “cultura” propia de una institución (la científica) y las condiciones de la adquisición de conocimientos del que aprende.

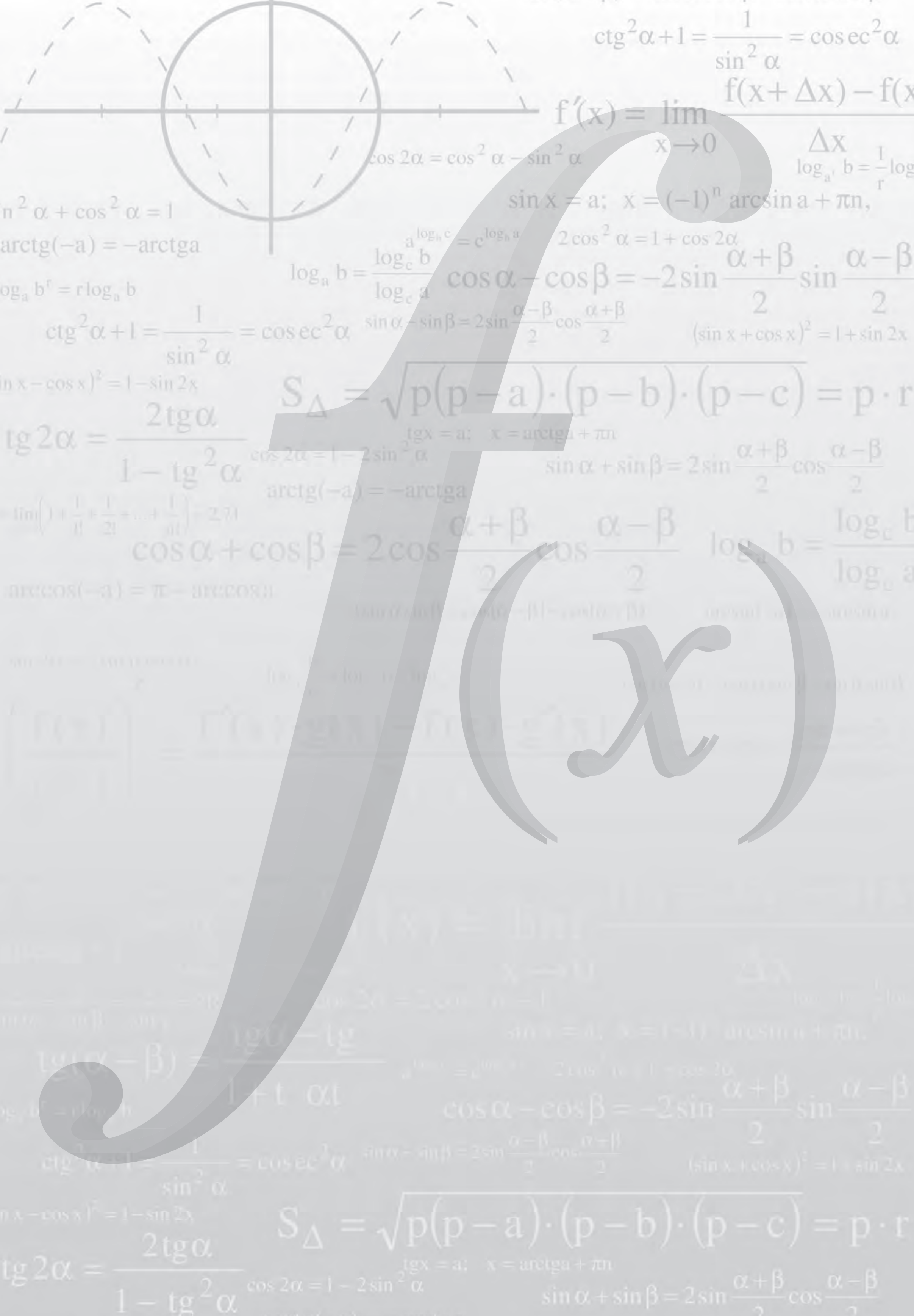
Un punto de inicio en esta problemática es la reflexión sobre los saberes. Es importante señalar que los conocimientos mediante los cuales se establecen las relaciones didácticas no son objetos muertos que el profesor “transmite” al alumno que los “recibirá” y se los “apropiará”. Por el contrario, la matemática educativa los concibe como objetos vivientes sujetos de evolución y cambio conforme la sociedad en donde ellos nacen o se enraízan. Particularmente, el estudio de las relaciones que el estudiante establece con los saberes que le son presentados, relaciones en sí mismas de naturaleza eminentemente móvil, es el centro de una reflexión sobre las condiciones y la naturaleza de los aprendizajes. Ello conduce a una aproximación opuesta a la “pedagogía general”, en tanto que ésta ofrece reglas de aprendizaje y de la educación independiente de los contenidos enseñados. Al menos para las disciplinas científicas y las matemáticas, cuyos contenidos son altamente estructurados, es poco probable que un conocimiento pertinente pueda construirse para explicar los fenómenos de enseñanza dejando de lado los saberes de referencia.

Esto último induce un estudio epistemológico para entender cuáles fueron las causas que posibilitaron la generación de los saberes con el fin de articularlos pertinentemente en el aula. Pero como ya señalamos antes, el fenómeno educativo es eminentemente social y compete a la cultura global en la que se sucede, por tanto, a los “puntos de vista” específicos del entorno social en el que se desarrolla, por lo que de manera natural, la investigación en matemática educativa se desarrolla al abrigo de diferentes paradigmas.

En este escrito nos proponemos hacer una revisión de nuestros resultados de investigación en el tema de precálculo, con el fin de posibilitar al profesor el conocimiento de las herramientas indispensables que le permitan realizar pertinentemente el diseño y aplicación de situaciones de aprendizaje en el aula de matemáticas. Para ello iniciamos con una breve descripción de la teoría de situaciones didácticas, que usamos en nuestros diseños. Ello sin pretender exhaustividad ni profundidad en la teoría; pero mostrando los elementos que consideramos esenciales. Al final damos las referencias bibliográficas que permitirán un estudio más amplio.

Enseguida haremos una presentación de nuestros resultados de manera resumida precisando tres aspectos importantes de nuestros diseños destinados a la adquisición de un lenguaje gráfico, a saber: operaciones gráficas, resolución gráfica de desigualdades y construcción de funciones.

Con ello creemos que el lector estará en condiciones de apropiarse de una visión global del quehacer de investigación en matemática educativa junto con su aplicación en el aula, con el fin de diseñar e implementar, pertinentemente, situaciones de aprendizaje a propósito del tema que aquí discutiremos: el curso de precálculo.



BREVE ESBOZO DE LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

La matemática educativa es la disciplina que estudia, fundamentalmente, los fenómenos que se producen en la escuela en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. La evolución de la didáctica de las matemáticas de arte a ciencia, ha ido modificando la manera en cómo se entienden los hechos didácticos. Desde la concepción de que la didáctica es un arte, poseído por unos cuantos y que hace que la función del alumno, sea dejarse moldear por el artista, para pasar luego a una etapa clásica, donde el aprendizaje era considerado como un proceso cognitivo.

La didáctica de las matemáticas es considerada como un caso particular de lo que podría denominarse como didáctica general, en donde las explicaciones de cómo aprende una persona, en general podían ser aplicadas al aprendizaje de las matemáticas. Gascón J., (1998), señala los dos siguientes aspectos, como característicos del enfoque clásico en didáctica de las matemáticas:

- Toma como problemática didáctica, una ampliación limitada de la problemática espontánea del profesor. Menciona como ejemplos de esto, los conocimientos previos de los alumnos, el problema de la motivación de los alumnos para el aprendizaje, los instrumentos tecnológicos de la enseñanza, la diversidad, cómo enseñar a resolver problemas, cómo evaluar, etc.
- Presentar el saber didáctico como un saber técnico, en el sentido de aplicación de otros saberes más fundamentales, importados de otras disciplinas.

Agrega además, que desde el punto de vista clásico, la didáctica de las matemáticas consiste en proporcionarle al profesor los recursos profesionales para llevar su trabajo de forma eficiente.

Desde esta perspectiva, enseñar y aprender matemáticas son nociones transparentes y no cuestionables. El análisis se centra en el alumno o el profesor, condicionándolo fuertemente a los procesos psicológicos asociados con la enseñanza y el aprendizaje. Interpreta el saber didáctico a un saber técnico, renunciando así a construir la didáctica de las matemáticas como un saber científico.

Para construir la didáctica de las matemáticas como saber científico, se requeriría un modelo de la matemática escolar, así como un modelo de la actividad matemática y un modelo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) parte de principios diametralmente opuestos a la concepción clásica, pues entiende que:

"Saber matemáticas" no es solamente saber definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlos y aplicarlos, es "ocuparse de problemas" en un sentido amplio que incluye encontrar buenas preguntas tanto como encontrar soluciones. Una buena reproducción, por parte del alumno, de la actividad matemática exige que éste intervenga en ella, lo cual significa que formule enunciados y pruebe proposiciones, que construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, que los ponga a prueba e intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura matemática y que tome los que le son útiles para continuar su actividad.

"Enseñar un conocimiento matemático concreto" es, en una primera aproximación, hacer posible que los alumnos desarrollen con dicho conocimiento una actividad matemática en el sentido anterior. El profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones matemáticas que ellos puedan vivir, que provoquen la emergencia de genuinos problemas matemáticos y en las cuales el conocimiento en cuestión aparezca como una solución óptima a dichos problemas, con la condición adicional de que dicho conocimiento sea construible por los alumnos.

Con el surgimiento de la teoría de situaciones, Brousseau, junto con otros investigadores, se dieron cuenta de la necesidad para la didáctica, de utilizar un modelo propio de la actividad matemática. En esto consiste precisamente el principio metodológico fundamental de la teoría de situaciones: definir un "conocimiento matemático" mediante una "situación", esto es, por un autómata que modela los problemas que únicamente este conocimiento permite resolver de formaóptima (Brousseau, 1994).

La teoría de situaciones adopta un enfoque sistémico ya que considera a la didáctica de las matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto (Brousseau, 1998).

Chevallard (1991) denomina este esquema teórico, como "sistema didáctico". El entorno inmediato del sistema didáctico es el "sistema de enseñanza", que está constituido por un conjunto

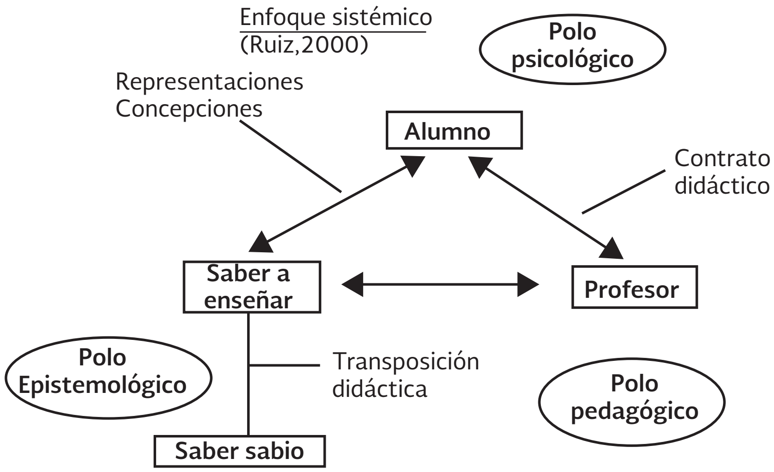


Figura 1 . Sistema didáctico.

diverso de dispositivos que permiten operar a los distintos sistemas didácticos. Alrededor de este sistema de enseñanza se encuentra el entorno social, que puede caracterizarse por la presencia de padres, académicos, y las instancias políticas. En el entorno de lo que Chevallard denomina el sistema de enseñanza *estricto sensu*, hay un “sitio” donde se piensa el sistema didáctico, denominado *noosfera*. En la noosfera, los representantes del sistema de enseñanza se encuentran directa o indirectamente con los representantes de la sociedad. Esta versión simplificada del desempeño escolar puede desarrollar formas muy complejas de operación.

Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El trabajo que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica (Chevallard, 1991, p.45.) La noosfera es el centro operacional del proceso de transposición. Allí se produce todo conflicto entre sistema didáctico y entorno.

Luego de que en el sistema didáctico se ha determinado un saber a enseñar, este es sin lugar a dudas un saber transpuesto, despersonalizado, descontextualizado. Constituye la labor del profesor proceder en sentido contrario al productor de tal conocimiento, debe contextualizar y repersonalizar el saber: busca situaciones que den sentido a los conocimientos por enseñar (Brousseau, 1999). El estudiante que se ha apropiado de los conocimientos, procede a descontextualizar y despersonalizar para poderlos usar.

Un supuesto básico de la TSD es que el alumno aprende, adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios... Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (Brousseau, 1999). Este supuesto se basa en principios de la psicología genética y de la psicología social, que se podrían resumir en: El aprendizaje se apoya en la acción. La adquisición, organización e integración de los conocimientos pasa por estados transitorios de equilibrio y desequilibrio, apoyados en los procesos de asimilación y acomodación[1]. Los aprendizajes previos de los alumnos deben tenerse en cuenta para construir los nuevos conocimientos y para superar los obstáculos: se conoce en contra de los conocimientos anteriores[2]. Los conflictos cognitivos entre miembros de un mismo grupo social pueden facilitar la adquisición del conocimiento[3] (Ruiz, 2000).

La concepción moderna de la enseñanza va por tanto a pedir al maestro que provoque en los alumnos las adaptaciones deseadas, con una elección acertada de los problemas que le propone.

Tomando una situación matemática como elemento primario, podemos plantearnos cómo transformarla en una situación de aprendizaje; para ello debemos cerciorarnos de que la respuesta inicial del alumno no constituya la respuesta “correcta”, sino que se vea obligado a modificar sus conocimientos previos. Uno de los factores principales de estas situaciones de aprendizaje, lo constituye el hecho de que las respuestas que produce el alumno, sean respuestas provocadas por las exigencias del medio, no los deseos del profesor; al logro de este hecho se le llama devolución de la situación por el profesor. La devolución no se realiza sobre el objeto de enseñanza sino sobre las situaciones que lo caracterizan (Brousseau, 1994).

Se llama situación adidáctica, a una situación matemática específica de dicho conocimiento tal que, por sí misma, sin apelar a situaciones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional, permita o provoque un cambio de estrategia en el alumno. Este cambio debe

---

[1] Estos, constituyen elementos básicos de la obra de Piaget.

[2] Esta afirmación constituye una idea fundamental de la epistemología de Bachelard (1986).

[3] Idea básica de la psicología social genética, representada por los trabajos de la escuela de Ginebra tales como Mungny (1986).

ser (relativamente) estable en el tiempo y estable respecto a las variables de la situación. La forma de provocar este cambio suele provenir de ciertas características de la situación adidáctica que hacen que fracasen las estrategias espontáneas (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997).

Se llamará variable didáctica, de la situación adidáctica, a aquellos elementos de la situación que al ser modificados permiten engendrar tipos de problemas a los que corresponden diferentes técnicas o estrategias de solución. El empleo que hace el profesor de situaciones adidácticas, con una determinada intención didáctica, constituye lo que se denomina situación didáctica. Ésta comprende las situaciones adidácticas, un cierto medio y el profesor, que tiene el propósito de que los alumnos aprendan un determinado conocimiento matemático.

El medio se constituye así en un elemento fundamental, dentro de la noción de situación didáctica, ya que está constituido por todos aquellos objetos con los que el estudiante está familiarizado y que puede emplear con seguridad y sin cuestionamientos, así como todas aquellas ayudas que se le proporcionan con el fin de que pueda lograr el objetivo deseado. Es muy importante notar que en tal medio se encuentra el profesor. Este hecho será de gran importancia en el momento de analizar la función del profesor en la actividad de reproducción de situaciones didácticas.

En la relación didáctica, maestro-alumno, se erige explícita o implícitamente, un acuerdo de cuáles son las responsabilidades de cada uno de ellos. Es un sistema de relaciones recíprocas análogas a las de un contrato, pero a diferencia de los contratos sociales, éste estará determinado no por reglas previas a la relación, sino por la naturaleza del conocimiento matemático buscado. Este contrato didáctico evoluciona conforme lo hace la relación del estudiante con la situación adidáctica. El estudiante puede resistirse a la devolución de la situación, o experimentar problemas, es entonces cuando las acciones del profesor, traducidas a la negociación del contrato, experimentan evolución.

Por último, como hemos dicho antes, las situaciones adidácticas están caracterizadas por un conocimiento específico; es posible establecer correspondencias entre estos tipos de conocimientos, los modos de funcionamiento de dichos conocimientos y los respectivos intercambios del alumno con el medio, que aquellas provocan. Con base en estas correspondencias, pueden ser definidas de la siguiente manera:

- **Situación de acción:** corresponde a un modelo implícito que sugiere una decisión o empleo de un algoritmo, y que provoca intercambio de informaciones no codificadas. El modelo de acción le permite al alumno mejorar su modelo implícito, son acciones que aún no le permiten probar ni formular una teoría.
- **Situación de formulación:** la forma de conocimiento, corresponde a un lenguaje que le permite la producción de mensajes y, por ende, el intercambio de informaciones codificadas según ese lenguaje. En este tipo de situaciones el estudiante intercambia y comunica sus exploraciones a sus compañeros o profesor y ya puede comunicarlos en un lenguaje matemático, así sea muy incipiente.
- **Situación de validación:** toma la forma de conocimiento de una teoría, que le permite construir sus propios juicios, pudiendo intercambiarlos. En esta situación, el estudiante debe demostrar por qué el modelo que construyó es válido, con el fin de convencer a otros de ello.

Ejemplo de situación

La teoría de las situaciones postula que cada conocimiento concreto debe poder "determinarse" (en el sentido indicado) mediante una o más situaciones matemáticas, cada una de las cuales recibe el nombre de situación específica para dicho conocimiento.

Una situación de aprendizaje es específica de un conocimiento concreto si cumple las dos condiciones siguientes:

Es comunicable sin utilizar dicho conocimiento.

- La estrategia óptima del juego formal[4] asociado a la situación matemática se obtiene a partir de la estrategia de base (que consiste en jugar al azar, aunque respetando las reglas del juego) utilizando el conocimiento en cuestión.

Existe una situación matemática modelizable (Brousseau, 1994) mediante el juego denominado "La carrera al 20": Se trata de un juego de dos jugadores en el que el jugador que empieza jugando debe decir un número x menor que 20 y el contrincante debe decir un número 1 o 2 unidades mayor: $x + m$ (con $m < 3$). Gana el jugador que dice 20 por primera vez. El conocimiento matemático asociado

[4] Se refiere a una analogía utilizada por Brousseau en donde modeliza a través de la teoría de juegos, el aprendizaje es entonces "ganar" el juego

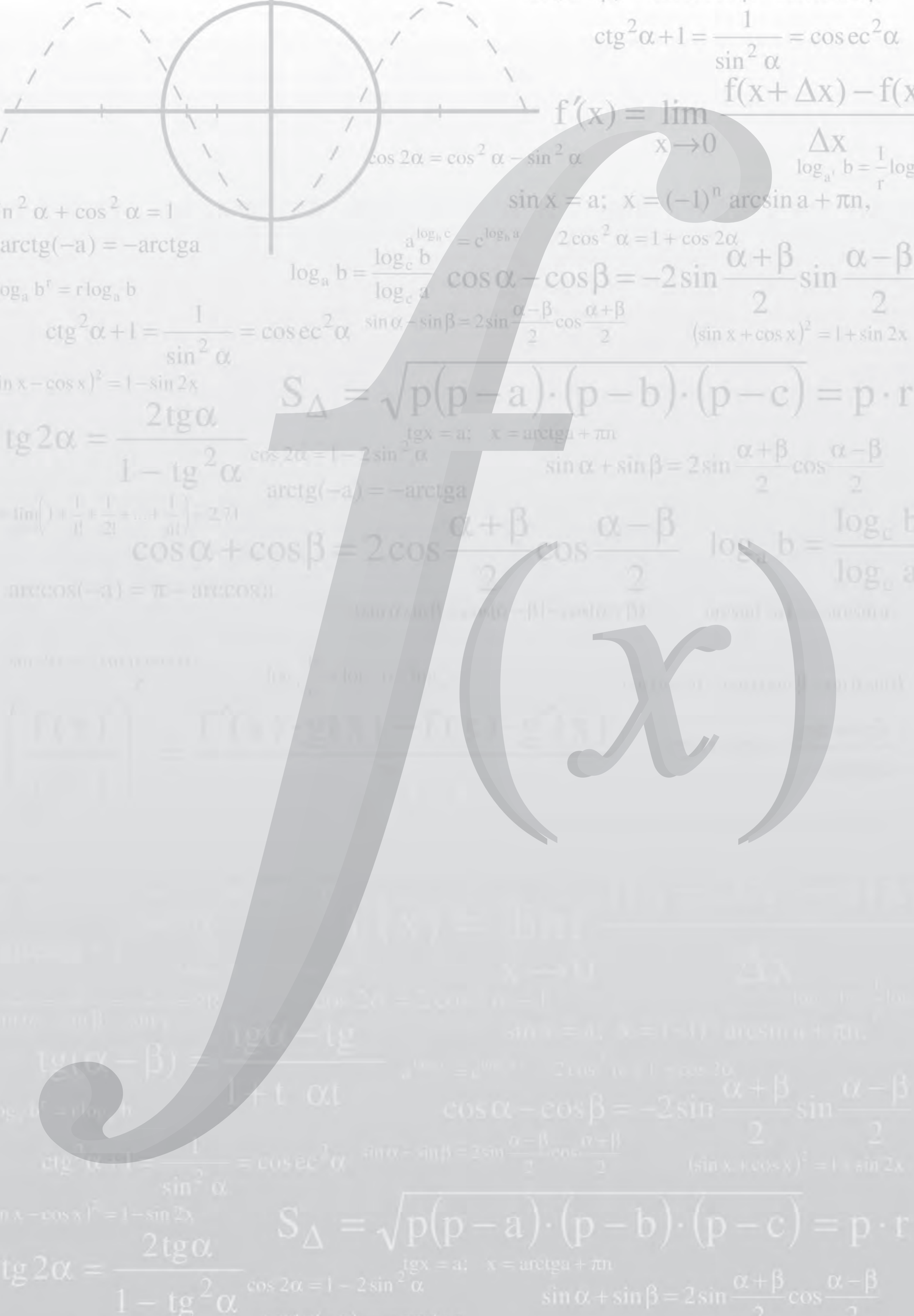
a la “carrera al 20” es la división euclídea: se trata de buscar los números que tengan el mismo residuo al dividir 20 entre 3 (números congruentes con 20 módulo 3).

Los valores 20 y 3 que aparecen en la definición de la “carrera al 20” son valores concretos de sendas variables de la situación matemática. Pueden variarse para dar origen a un cambio en el juego que provoca una modificación de la estrategia óptima (si bien el conocimiento matemático asociado sigue siendo el mismo).

- Si $n = 20$ y $m<3$, la estrategia ganadora consiste en decir, sea cual sea el número elegido por el contrincante, un número de la lista: 2, 5, 8, 11, 14, 17 y 20.
- Si $n = 45$ y $m<7$, la estrategia ganadora consiste en decir: 3,
- 10, 17, 24, 31, 38 y 45.
- Si $n = 100$ y $m<12$, la estrategia ganadora consiste en decir:
- 4, 16, 28, 40, 52, 64, 76, 88 y 100.

Una variable de una situación adidáctica se llama variable didáctica si sus valores pueden ser manipulados (fijados o cambiados) por el profesor. Partiendo de un conocimiento concreto y de una situación adidáctica específica de dicho conocimiento, resulta que la modificación de los valores de las variables didácticas de esta situación adidáctica permite engendrar un tipo de problemas a los que corresponden diferentes técnicas o estrategias de resolución.

Ahora puede decirse que aprender un conocimiento matemático significa adaptarse a una situación adidáctica específica de dicho conocimiento, lo que se manifiesta mediante un cambio de estrategia del jugador (el alumno) que le lleva a poner en práctica la estrategia ganadora u óptima de manera estable en el tiempo y estable respecto a los diferentes valores de las variables de la situación adidáctica en cuestión.



SOBRE EL PRECÁLCULO

Tradicionalmente el curso de precálculo es un repertorio de procedimientos y algoritmos provenientes esencialmente del álgebra y de la geometría analítica, tocando con mayor o menor énfasis el estudio de función, habitualmente sobre la definición de Dirichlet-Bourbaki. La enseñanza tiende a sobrevalorizar los procedimientos analíticos y la algoritmización, dejando de lado los argumentos visuales, por no considerarlos como matemáticos, entre otras causas. Es decir, la concepción que de la matemática se tenga, permea la de su enseñanza, independientemente de los estudiantes a los que se dirige. A ello se aúna el contrato didáctico establecido, que como parte de la negociación impide que el *estatus* del profesor sea demeritado, si éste no resuelve satisfactoriamente los problemas planteados en el curso; el recurso algorítmico permite subsanar decorosamente lo establecido en el contrato y "aligera", eliminando dificultades subyacentes al contenido matemático.

La investigación sobre las premisas que sustentan la instalación de un lenguaje gráfico que permita el tránsito entre varios contextos ha sido reportada en Farfán (1997 y 2012); Cantoral y Farfán, (1998 y 2003). En síntesis, hemos sostenido que para acceder al pensamiento y lenguaje variacional, elementos centrales del estudio del precálculo y cálculo, se precisa, entre otros, del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende. El conocimiento de la recta y la parábola no resultan suficientes para desarrollar las competencias esperadas en los cursos de cálculo.

En términos escolares existe la necesidad de modificar el curso de precálculo al inicio de los estudios universitarios, y un diseño para la escuela lo presentamos en Albert, Arrieta y Farfán (2001). En lo que sigue expondremos grosso modo los elementos del análisis preliminar (en términos de ingeniería didáctica) así como los elementos sustantivos del diseño con el fin de proporcionar un ejemplo de innovación para la escuela, obtenido de la investigación en matemática educativa.

- **Estudio epistemológico.** La naturaleza del concepto de función es en extremo compleja; su desarrollo se ha hecho casi a la par del humano, es decir, encontramos vestigios del uso de correspondencias en la antigüedad, y actualmente se debate sobre la vigencia, en el ámbito de las matemáticas, del paradigma de la función como un objeto analítico. Empero, el concepto de función devino protagónico hasta que se le concibe como una fórmula, es decir, hasta que se logró la integración entre dos dominios de representación: el álgebra y la geometría. La complejidad del concepto de función se refleja en las diversas concepciones y representaciones con las que se enfrentan los estudiantes y profesores. Una lista exhaustiva de obstáculos epistemológicos del concepto de función se encuentra en Sierpinska (1992).
- **Estudio cognitivo.** Los objetos inmersos en el campo conceptual del cálculo (análisis) son particularmente complejos a nivel cognitivo pues, como en el caso que nos ocupa, la función se presenta como un proceso cuyos objetos son los números; este mismo concepto deviene en objeto al ser operado, con otro proceso como la diferenciación (o integración) y así sucesivamente. De otra forma que al iniciar un curso de cálculo el estudiante debe concebir la función como un objeto y por ende susceptible de operación; de otra forma, ¿qué significa operar un proceso? En nuestras experiencias con profesores y estudiantes hemos constatado que si logran incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas, no sólo manejan la función como objeto sino que además transitan entre los contextos algebraico, geométrico y numérico versátilmente, es decir, si se tiene dominio del contexto geométrico/visual tanto en la algoritmia y la intuición como en la argumentación es posible el tránsito entre las diversas representaciones. El problema estriba en la dificultad cognitiva para adquirir maestría en el contexto geométrico, por ejemplo, en el plano de la argumentación es mucho más fácil mostrar algebraica que geométricamente la existencia de una raíz doble, por lo que se acude al refugio algorítmico fácilmente.

A partir de estos elementos nos proponemos un diseño con el objetivo explícito de construir un lenguaje gráfico. La hipótesis central, después de un profundo análisis socioepistemológico como el que se desarrolla en Farfán (2012), consiste en asumir que: previo al estudio del cálculo se precisa de la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite, esencialmente, la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos, a causa de las enseñanzas tradicionales, estableciendo un isomorfismo operativo entre el álgebra básica y el estudio de curvas, mejor aún, entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico.

Esta hipótesis ha sido desarrollada tomando las dos siguientes directrices: en primer término se presenta la posibilidad de operar gráficas en analogía con los números o las variables, dando sentido a operaciones fundamentales, como:

- $f(x)$ y $f(-x)$ — Reflexión respecto del eje x y del eje y, respectivamente.
- $f(x+a)$ y $f(x-a)$ con $a>0$ — Traslación en la dirección del eje x.
- $f(x)+a$ y $f(x)-a$ con $a>0$ — Traslación en la dirección del eje y.
- $af(x)$ — Contracción o dilatación respecto del eje y.
- $f^{-1}(x)$ — Reflexión respecto de la recta $y=x$.
- $\frac{1}{f(x)}$ — Invierte ceros en asíntotas y viceversa, y las abscisas tales que $|y|>1$ corresponderán con aquéllos donde $|y|<1$ y viceversa, dejando intactos los puntos sobre las rectas $y=1$ y $y=-1$.
- $|f(x)|$ y $f(|x|)$ — Respectivamente reflexión de las imágenes negativas al simétrico positivo respecto del eje x y reflexión de sustitución del lado de la gráfica con ordenadas negativas por la reflexión del lado de la gráfica con ordenadas positivas.

El segundo aspecto relevante lo constituye la posibilidad de construir un universo amplio de funciones a partir de tres funciones primitivas de referencia: la identidad ($f(x)=x$), la exponencial ($f(x)=a^x$) y la sinusoidal ($f(x)=sen\ x$), todas ellas para construir las funciones elementales en el sentido de Cauchy. Respectivamente, ellas sirven para construir operando las gráficas a las funciones algebraicas, logarítmicas y exponenciales y las trigonométricas gráficamente.

Diseño de una ingeniería didáctica. Estrategias de base para el diseño

- Operaciones de base en analogía con los números o las variables
- Apoyo en técnicas algebraicas para construir gráficas; p.e. para graficar $y = ax^2+bx+c$, se necesita operar algebraicamente para obtener la forma $y = a\ (x+b/2a)^2 - (b2-4ac)\ /\ 4a$
- Y recíprocamente, generar la necesidad de operar gráficamente ante la posiblilidad de hacerlo algebraicamente, por ejemplo resolver desigualdades de aspecto complejo

Figura 2. Diseño de una ingeniería didáctica.

En este acercamiento ha resultado importante plantear situaciones que incluyan enunciados algebraicos que por su complejidad favorezcan el uso del lenguaje gráfico, por ejemplo la tarea:

Resuelve la desigualdad $\frac{|x-a|+|x-b|}{|x+b|+|x+a|} \leq kx$

Es ampliamente desarrollada como estrategia de enseñanza en Albert y Farfán (1997). Para todo ello es necesario operar algebraicamente con el fin de obtener la gráfica de las funciones involucradas para que al final sean comparadas y resolver de este modo los sistemas de ecuaciones a que haya lugar. Del mismo modo, buscar los extremos de funciones como $\frac{x}{ax^2+b}$ con a y b positivos, permite avanzar en la construcción del puente entre contextos, pues la tarea en este contexto sirve de guía a la sintaxis algebraica, de modo que ésta se refuerza en su significado.

Describimos enseguida dos ejemplos:

1. Resolución de la desigualdad $x^2 - x - 2 < x + 1$

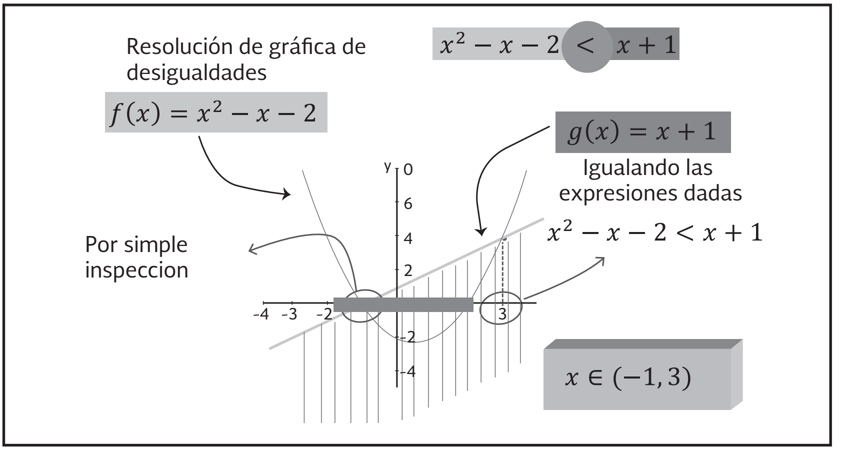


Figura 3. Resolución de gráfica de desigualdades.

En la imagen anterior pueden notarse las gráficas tanto de $f(x)=x^2-x-2$ como de $g(x)=x+1$. El método consiste en encontrar los puntos de corte de ambas gráficas, es decir, donde la gráfica de la función cuadrática es igual a la gráfica de la función lineal: $x^2-x-2=x+1$. La importancia de estos puntos radica en que marcan un cambio en las imágenes de una función con respecto a la otra. Esto es, en el primer punto de corte entre las gráficas, $x=-1$, las imágenes de la cuadrática pasan de ser mayores a ser menores que las imágenes de la lineal. En el segundo punto de corte, $x=3$, las imágenes de la cuadrática pasan de ser menores a ser mayores que las imágenes de la lineal. Con este análisis es que se obtiene que en el intervalo abierto $(-1,3)$ la gráfica de $f(x)$ es menor que la gráfica de $g(x)$, es decir, se cumple la desigualdad.

2. Resolución de la desigualdad $|x - 2| \geq |x + 1|$

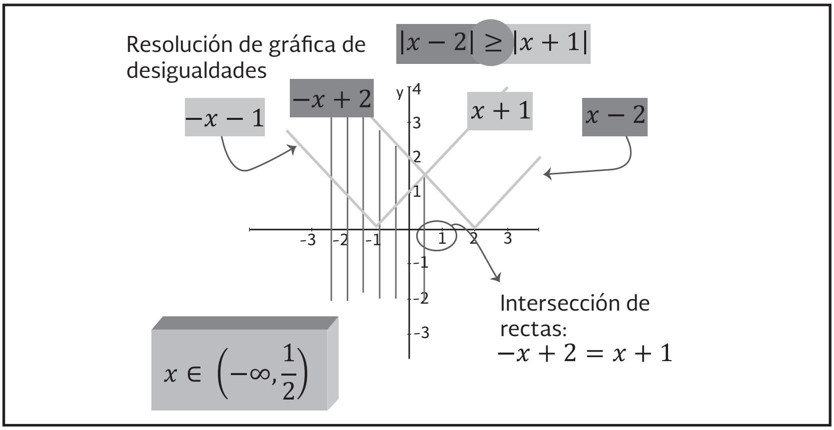
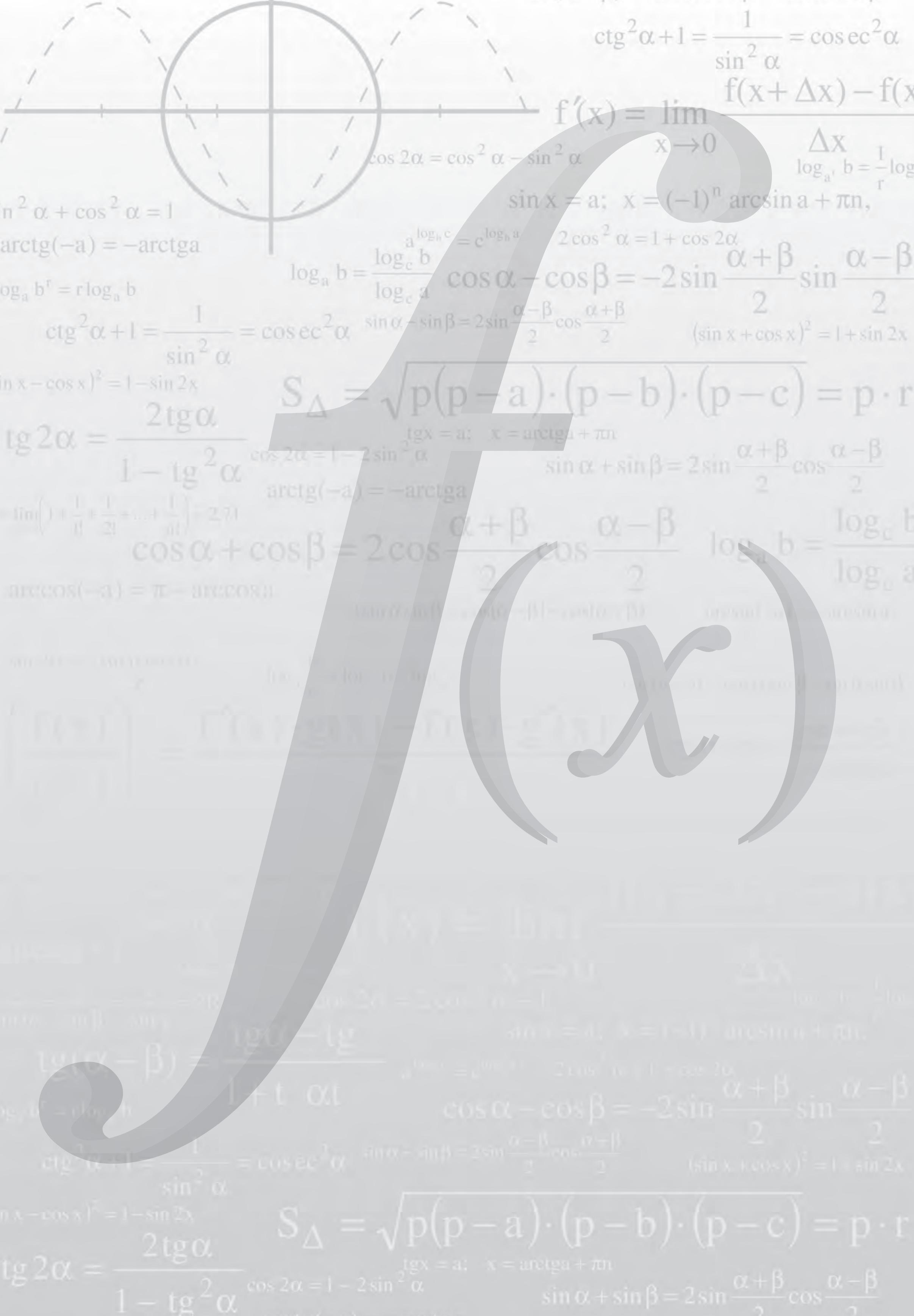


Figura 4. Resolución de gráfica de desigualdades.

En la figura 4 pueden notarse las gráficas de $|x - 2|$ y de $|x + 1|$. Al igual que en el ejemplo 1, el método para resolver la desigualdad consiste en encontrar el punto de intersección de ambas gráficas, específicamente, donde $-x+2=x+1$. Dicho punto resulta relevante en tanto que determina un cambio en el comportamiento de las imágenes de una función con respecto a la otra. Es decir, en $x = \frac{1}{2}$ las imágenes de $-x+2$ pasan de ser mayores que $x+1$ a ser menores. Por tanto, el intervalo donde $|x-2|$ es mayor que $|x-1|$ es $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

En síntesis estas son las premisas de nuestro acercamiento, cuyos ejemplos se expondrán en lo que sigue. Antes, es importante señalar que el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional en los estudiantes precisa de procesos temporalmente prolongados a juzgar por los tiempos didácticos habituales. Supone, por ejemplo, del dominio de la matemática básica y de los procesos del pensamiento asociados, pero exige simultáneamente de diversas rupturas con estilos del pensamiento prevariacional, como el caso del pensamiento algebraico ampliamente documentado por Michelle Artigue (Artigue, 1998). Esa ruptura, además, no puede ser sostenida exclusivamente en el seno de lo educativo con base en un nuevo paradigma de rigor que se induce simplemente de la construcción de los números reales como base de la aritmetización del análisis, ni tampoco puede basarse sólo en la idea de aproximación, sino que debe ayudar también a la matematización de la predicción de los fenómenos de cambio (Cantoral y Farfán, 1998 y 2003).



OPERACIONES GRÁFICAS

Creemos que es necesario rescatar algunos "mecanismos" que permitan generar conocimiento y darle significado a ciertos contenidos matemáticos. En este sentido, es importante que los estudiantes logren un buen manejo del lenguaje gráfico y un pasaje fluido del contexto algebraico al gráfico. Con ello, estaremos proporcionándoles una base más sólida dónde asentar otros conceptos de Cálculo, como el comportamiento de funciones, la obtención de áreas, entre otros, y aportándoles herramientas que les permitirán una mejor comprensión y, por ende, apropiación de conocimientos en niveles más abstractos.

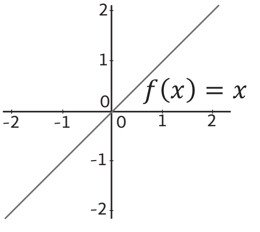
Con el manejo de este tipo de operaciones intentamos que los estudiantes se apropien de un manejo del "lenguaje gráfico" que implica, por un lado, inducirlo a la "semántica gráfica", es decir, a la construcción de significados previos de las operaciones gráficas; y por otro, a la "sintaxis gráfica", vale decir, a su simbolización respetando ciertas reglas. En este espacio presentamos sólo el estudio de una operación; sin embargo, en Farfán *et al.* (2000) pueden consultarse algunas otras.

Estudio de $\frac{1}{f(x)}$ a partir de $f(x)$

Para construir la gráfica del recíproco de una función, partiremos de $f(x) = x$, pues se considera que es reconocida por el alumno. Así, se intenta que, de un análisis exhaustivo de la construcción de $\frac{1}{x}$ se logre la generalización a cualquier función mediante la detección de propiedades comunes.

Partimos entonces, de la forma elemental $f(x) = x$

Sus características son, entre otras:



- $Dom\, f = \mathbb{R}$.
- Es creciente, pues si $a < b$ entonces $f(a) < f(b)$.
- Es continua.
- Es simétrica respecto al origen de

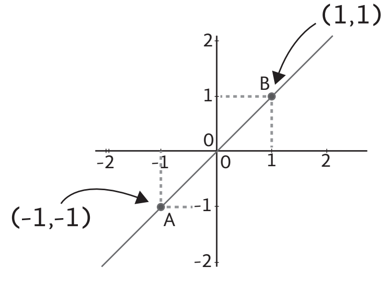
coordenadas, por tanto es una función impar, es decir, que $f(-x) = -x\, f(x)$ ya que $f(-x) = -x - f(x)$.

- $f(x)$ es positiva si $x > 0$, es decir, $f(x) > 0$ si y solo si $x > 0$.
- $f(x)$ es negativa si $x < 0$, es decir, $f(x) < 0$ si y solo si $x < 0$.
- $f(x) = 0$ si y solo si $x = 0$.

Identificar características de $f(x)$ es relevante en cuanto se desea establecer cómo se modifican o conservan estas propiedades al calcular el recíproco de $f(x)$.

a) Estudio de los puntos $(1,1)$ y $(-1, -1)$

Definimos $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$



si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$

$$g(1) = \frac{1}{1} = 1$$

si $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1$

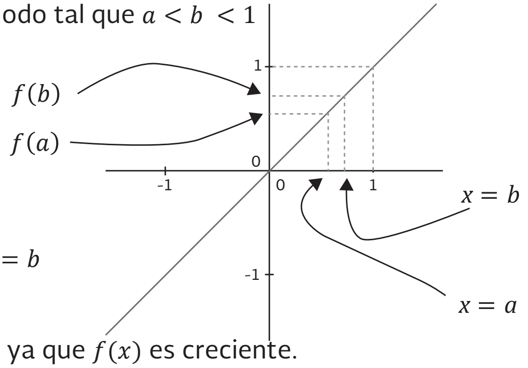
$$g(-1) = \frac{1}{-1} = -1$$

Es decir, los puntos $(1,1)$ y $(-1, -1)$ pertenecen tanto a la gráfica de f como a la de g.

b) Estudio de puntos $a, b \in (0,1)$

Para los puntos del intervalo $(0,1)$ haremos las siguientes consideraciones: $x = b$ $x = a$

Sean $a, b \in (0,1)$ de modo tal que $a < b < 1$



como $f(a) = a$ y $f(b) = b$

entonces $f(a) < f(b)$, ya que $f(x)$ es creciente.

- Pero, $g\ (a) = \frac{1}{a}$ y $g\ (b) = \frac{1}{b}$. Si recordamos que $0 < a < b < 1$

- Y si dividimos entre $a > 0$ las desigualdades no se alteran, por tanto:

$$1 < \frac{b}{a} < \frac{1}{a}$$

- Si dividimos ahora entre $b > 0$ obtenemos:

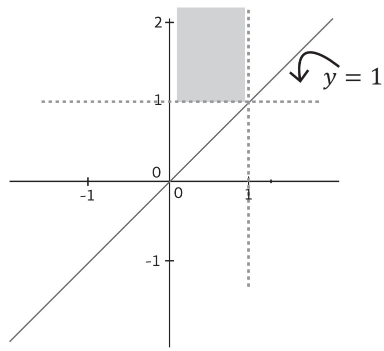
$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{ab}$$

- Además, $b < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{b}$

- Entonces, $1 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

- Es decir, $1 < g(b) < g(a)$

- Por tanto, $g(x)$ decrece y se ubica por encima de $y = 1$.



Como ejemplo calculemos algunos puntos para comenzar a trazar la gráfica:

- $x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2} \quad$ y $\quad g(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

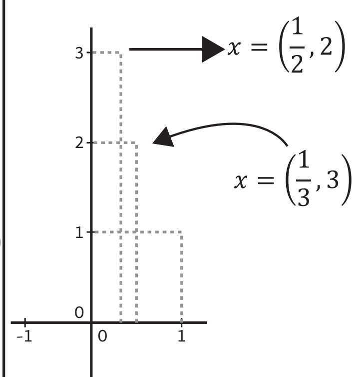
- $x = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{3} \quad$ y $\quad g(x) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

Si hacemos x cada vez más pequeño:

- $x = \frac{1}{100} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{100}$ y $g(x) = \frac{1}{\frac{1}{100}} = 100$

en general, para n cada vez más grande

- $x = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow f(x) = \frac{1}{n} \quad$ y $\quad g(x) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$



Observamos que, a medida que $f(x)$ se hace más pequeño, $g(x)$ se hace más grande. Es decir, si hacemos tender x a cero, $f(x) = x$ también se acercará tanto como deseemos a cero, y por lo tanto, $g(x) = \frac{1}{x}$ tenderá a infinito, esto es, se hará tan "grande" como queramos.

Tomemos ahora dos puntos de $f(x)$:

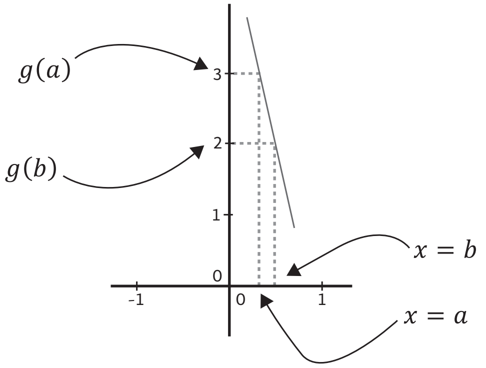
$(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ tales que $a, b, \in (0,1)$ con $a < b$

entonces, $f(a) < f(b)$

y, por lo visto anteriormente, $g(a) > g(b)$

Además, $b - a > 0$ y $g(b) - g(a) < 0$

Efectivamente: $g(b) - g(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} = -\frac{(b-a)}{ab}$



La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, g(a))$ y $(b, g(b))$ es:

$$m = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = \frac{\frac{a-b}{ab}}{b-a} = \frac{1}{ab}$$

Conforme a y b sean más pequeños $g(a) = \frac{1}{a}$ y $g(b) = \frac{1}{b}$ serán cada vez más grandes. Por otro lado, el producto de ab también está acercándose a cero, por tanto, $\frac{1}{ab}$ se está haciendo "muy grande", es decir, este valor tiende a infinito (negativo).

Luego, como la pendiente de la recta secante a la gráfica de $g(x)$ es $-\frac{1}{ab}$ esta recta se va haciendo cada vez más paralela al eje y a medida que nos acercamos a $x = 0$. Esto nos lleva a pensar que los puntos de la gráfica de $g(x)$ no atravesarán el eje vertical. Podemos deducir entonces que: $x = 0$ es una asíntota de la gráfica de $g(x) = \frac{1}{x}$.

c) Estudio de puntos $a,b \in (1 + \infty)$

Ahora consideremos el intervalo $(1{+}\infty)$ y sean $a,b \in (1,+\infty)$ tales que $1\ a < b$

Si dividimos entre $a > 0$ las desigualdades no se alteran y obtenemos

$$\frac{1}{a} < 1 < \frac{b}{a}$$

de igual manera, si dividimos ahora entre $b > 0$ nos queda

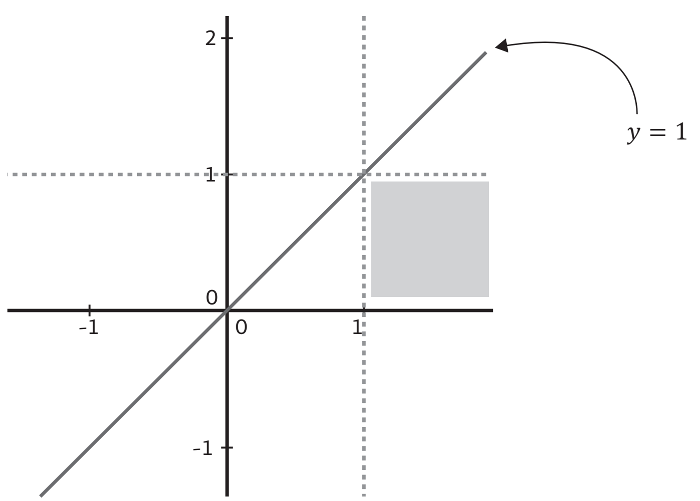
$$\frac{1}{ab} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 1$$

Luego,

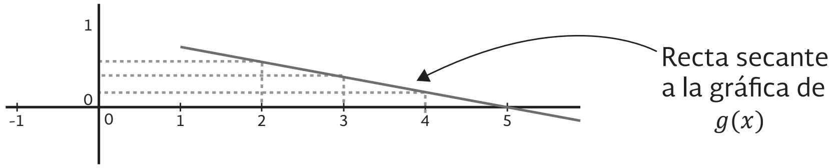
$$\left.\begin{array}{l} f(a) = a \\ f(b) = b \end{array}\right\}$$ por tanto $1 < f(a) < f(b)$, y f crece y se mantiene por encima de la recta $y = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} g(a) = \frac{1}{a} \\ g(b) = \frac{1}{b} \end{array}\right\}$$ por tanto $g(b) < g(a) < 1$, g decrece y se mantiene por debajo de la recta $y = 1$.

Por otro lado, si $x \in (1,+\infty) \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow g\ (x) > 0$, es decir, $g\ (x)$ se mantiene por encima de la recta $y = 0$, luego $0 < g\ (x) < 1$ para todo $x \in (1,+\infty)$.



Anteriormente vimos que la pendiente de la recta que une dos puntos $(a, g(a))$ y $(b, g(b))$ es: $m = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a} = -\dfrac{1}{ab}$



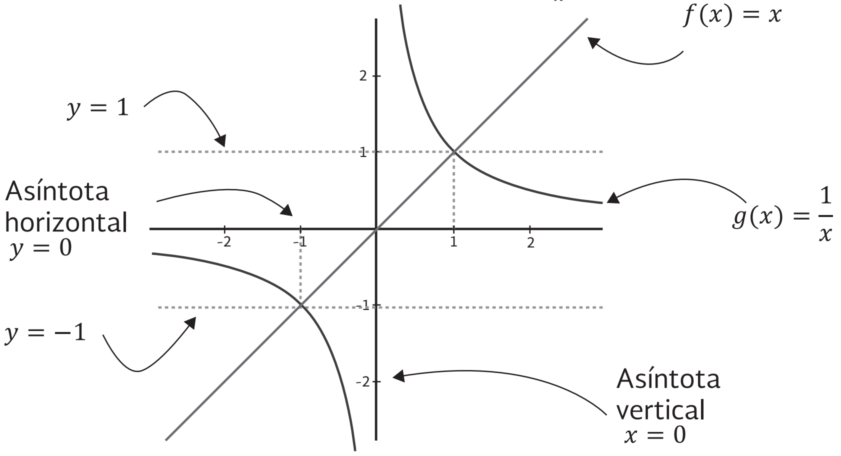
Si ahora hacemos que a y b sean cada vez más grandes, es decir, que ambos tiendan a infinito, la pendiente de esta recta a la gráfica de $g(x)$ tenderá a cero, es decir, será cada vez más horizontal o paralela al eje x. Esto nos hace pensar que los puntos de la gráfica de $g(x)$ no atravesarán la recta $y = 0$. Así, el eje x será una asíntota horizontal de la gráfica de $g(x)$.

Del análisis de las características de $f(x)$, sabemos que f es una función impar.

Como $g(x) = \frac{1}{x}$, entonces $g(-x) = -\frac{1}{x} = -g(x)$ de lo que concluimos que $g(x)$ es impar, por lo tanto, la gráfica de $g(x)$ es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Entonces, con lo estudiado hasta ahora, estamos en condiciones de trazar la gráfica completa.

Gráfica de $f(x) = x$ y de su recíproca $g(x) = \frac{1}{x}$.



Analicemos ahora la manera en que se puede construir la gráfica del recíproco de una función arbitraria a partir de su gráfica. Para ello utilizaremos los resultados que obtuvimos en el estudio del recíproco de la función elemental $f(x) = x$.

Generalización de la construcción de $\frac{1}{f(x)}$ a partir de cualquier $f(x)$

1) Signo de $\frac{1}{f(x)}$

2) Puntos invariantes.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } f(x) > 0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} > 0 \\ \\ \text{Si } f(x) < 0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} < 0 \end{array}\right\} \text{ Por tanto, el signo de } \frac{1}{f(x)} \text{ es el mismo de } f(x).$$

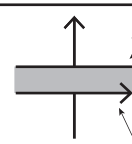
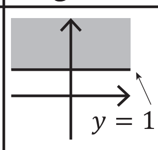
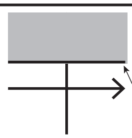
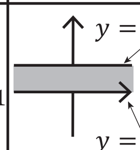
Sabemos que el recíproco de 1 es él mismo.

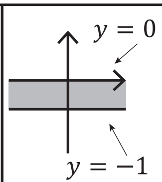
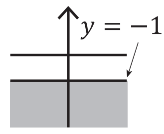
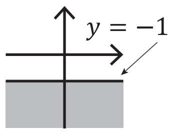
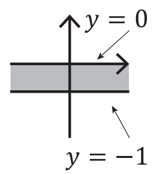
Por tanto, si $f(x) = 1$ para algún $x \in Dom\ f \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = 1$

Lo mismo ocurre con -1.

En conclusión, los puntos de la forma $(x,1)$ y $(x,-1)$ que pertenecen a la gráfica de $f(x)$, pertenecen también a la gráfica de $\frac{1}{f(x)}$.

Todas las consideraciones anteriores quedan resumidas en la siguiente tabla:

$f(x)$	**Significado gráfico**	$\frac{1}{f(x)}$	**Significado gráfico**	**Observaciones**
$0<f(x)<1$		$\frac{1}{f(x)} > 1$		La gráfica de $\frac{1}{f(x)}$ se halla por encima de la recta $y = 1$.
$f(x) > 1$		$0<\frac{1}{f(x)}<1$		La gráfica de $\frac{1}{f(x)}$ se halla por debajo de la recta $y=1$ y por encima del eje x.

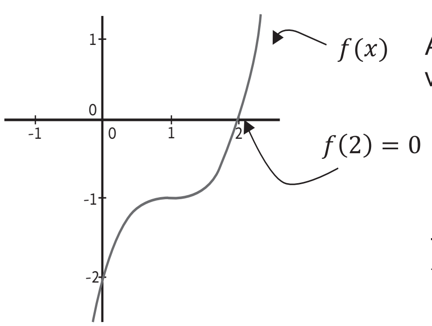
$-1<f(x)<0$		$\frac{1}{f(x)}<-1$		La gráfica de $\frac{1}{f(x)}$ se halla por encima de la recta $y=-1$.
$f(x)<-1$		$-1<\frac{1}{f(x)}<0$		La gráfica de $\frac{1}{f(x)}$ se halla por debajo de la recta $y=-1$ y por encima del eje x.

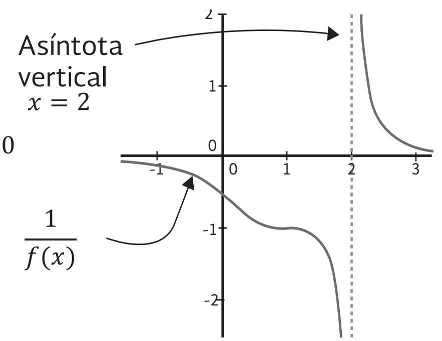
De la tabla anterior, se deduce la importancia de graficar las rectas $y=1$ y $y=-1$ pues dan una primera aproximación de las regiones donde se encontrará la gráfica de $\frac{1}{f(x)}$.

3) Ceros de $f(x)$

Si existe a$\in$ $Dom\,f$, tal que $f(a)=0$, entonces $\frac{1}{f(a)}$ no está definida.

Por tanto, un cero de $f(x)$ se convierte en una asíntota de $\frac{1}{f(x)}$.

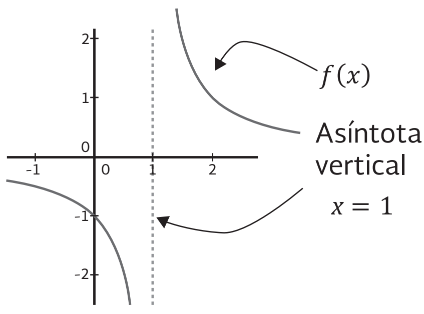


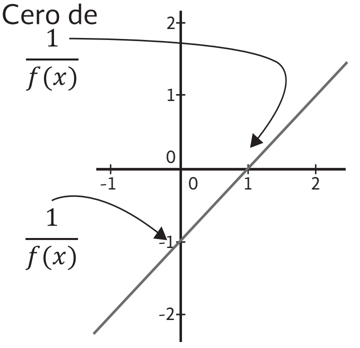


4) Asíntotas verticales de $f(x)$

Si $f(x)$ tiene una asíntota vertical en algún x, entonces, $f(x)$ tiende a infinito.

Por tanto, una asíntota vertical de $f(x)$ se convierte en un cero de $\frac{1}{f(x)}$.



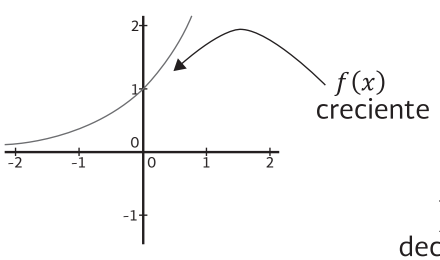


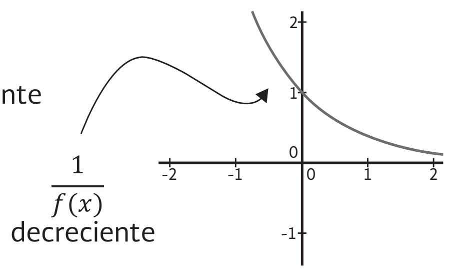
5) $f(x)$ creciente o decreciente

$f(x)$ es creciente sí y solo si, para todo a,b∈ $Dom\,f$, tales que $a < b$ se cumple que $f(a) < f(b)$; luego, si $a,b \in Dom\,f$, tales que $a < b$ vimos

que $\frac{1}{f(b)} < \frac{1}{f(a)}$ por lo tanto, podemos concluir que:

Si $f(x)$ es creciente $\Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ es decreciente.





Análogamente,

Si $f(x)$ es decreciente $\Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ es creciente.

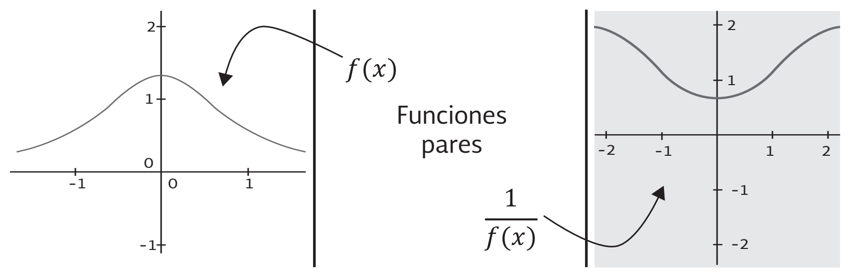
6) Simetría respecto al eje y, es decir, $f(x)$ es una función par

$f(x)$ es una función par, si y solo si, para todo $x \in Dom\, f$ se cumple que $f(-x) = f(x)$.

Vemos $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x}$ y podemos entonces concluir lo siguiente:

Si $f(x)$ es una función par, entonces $\dfrac{1}{f(x)}$ es una función par.

Por lo tanto, $\dfrac{1}{f(x)}$ también es simétrica respecto al eje y.

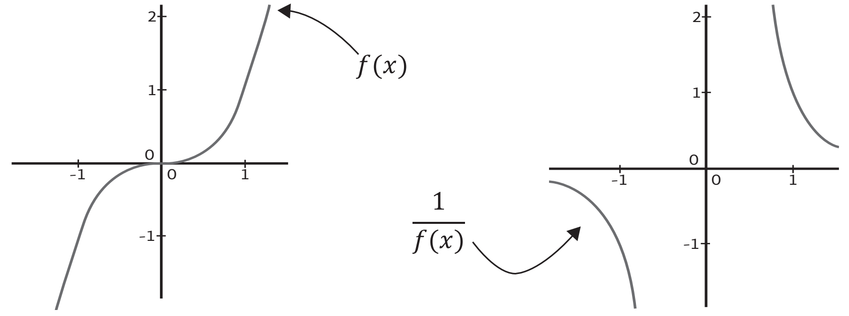


7) Simetría respecto al origen de coordenadas, es decir, $f(x)$ es una función impar

$f(x)$ es una función impar, si y solo si, para todo $x \in Dom\, f$ se cumple que $f(-x) = -f(x)$.

Luego $\dfrac{1}{f(-x)} = -\dfrac{1}{f(x)}$ podemos entonces concluir que:

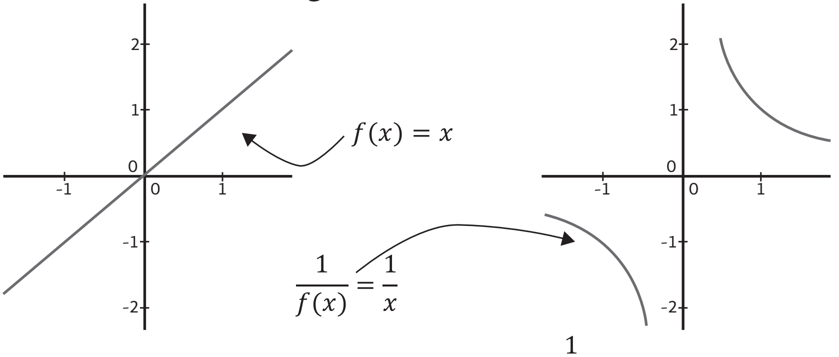
Si $f(x)$ es una función impar $\Rightarrow \dfrac{1}{f(x)}$ es una función impar. Por lo tanto, $\dfrac{1}{f(x)}$ también es simétrica respecto al origen de coordenadas.



8) Continuidad de $f(x)$

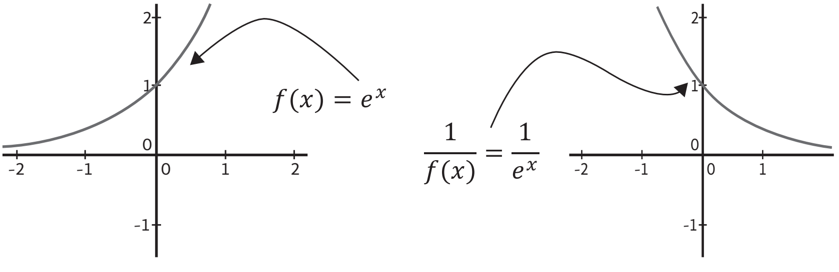
Que $f(x)$ sea una función continua en todo su dominio, no implica que $\frac{1}{f(x)}$ también lo sea. En efecto, puede ocurrir que:

- $f(x)$ sea continua, como por ejemplo $f(x) = x$, pero su recíproca puede ser discontinua, tal es el caso de $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x}$. Observemos sus gráficas:



- Puede ocurrir que tanto $f(x)$ como $\frac{1}{f(x)}$ sean continuas en su dominio, como por ejemplo, $f(x) = e^x$ y $\frac{1}{f(x)} = e^{-x}$

  Observemos sus gráficas:



En conclusión podemos asegurar que:

- Si $f(x) \neq 0$, para todo $x \in Dom\, f$, y $f(x)$ es continua entonces $\frac{1}{f(x)}$ es continua.
- Si $f(x)=0$, para algún $x \in Dom\, f$, entonces $\frac{1}{f(x)}$ es discontinua.

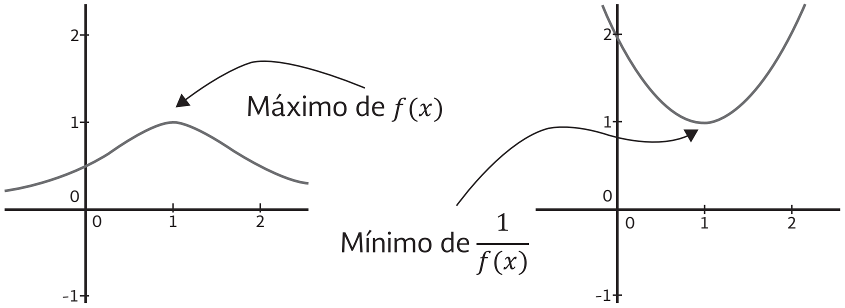
9) Máximos y mínimos relativos de $f(x)$

Recordemos que una función alcanza un máximo en $x = a$, si existe una vecindad V tal que para todo $x \in V$ $f(a) \geq f(x)$.

Luego, si existe $a \in Dom\, f$, tal que $f(a)$ es un máximo relativo de f,

siendo $f(x) \neq 0$ para todo $x \in V$ tendremos que $\frac{1}{f(x)} < \frac{1}{f(a)}$ en dicha vecindad. Por tanto, en $x = a$, $\frac{1}{f(x)}$ presenta un mínimo relativo.

Observemos esto gráficamente.



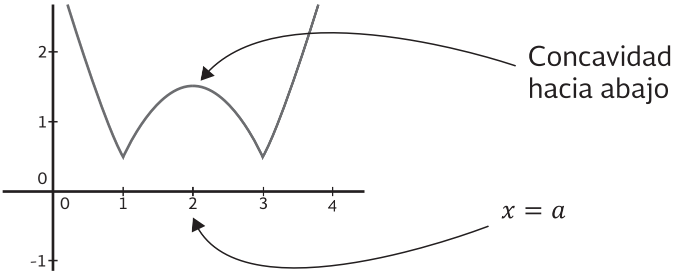
Vemos que $f(x)$ presenta un máximo en $x = 1$, pues para los, $x < 1$, $f(x)$ es creciente, en tanto que para los $x > 1$, es decreciente. De lo analizado en los puntos anteriores, sabemos que $\frac{1}{f(x)}$, será decreciente para los $x < 1$ y creciente para los $x > 1$. Luego, $\frac{1}{f(x)}$ presenta un mínimo en $x = 1$.

En conclusión:

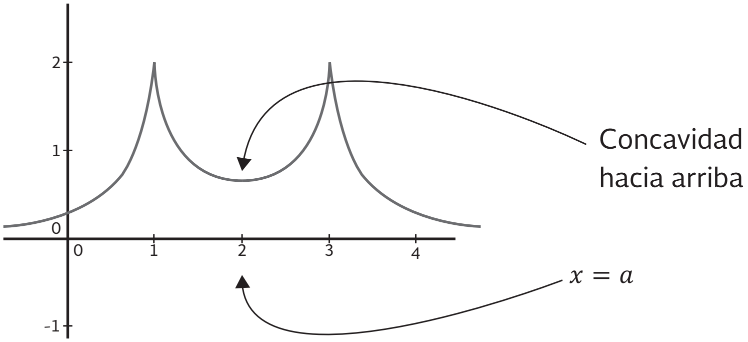
- Si $f(x)$, con $f(x) \neq 0$ para todo $x \in V$, presenta un máximo en $x = a$, entonces $\frac{1}{f(x)}$ tiene un mínimo en $x = a$.
- Si $f(x)$ presenta un mínimo en $x = a$, entonces $\frac{1}{f(x)}$ tiene un máximo en $x = a$, siempre que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in V$.

10) Concavidad

El estudio de la concavidad de $\frac{1}{f(x)}$ no es trivial, y aquí sólo analizaremos algunos casos particulares, dejándole al lector la tarea de analizar con mayor profundidad. Tomemos, a modo de primer ejemplo, una función f cuya gráfica es:

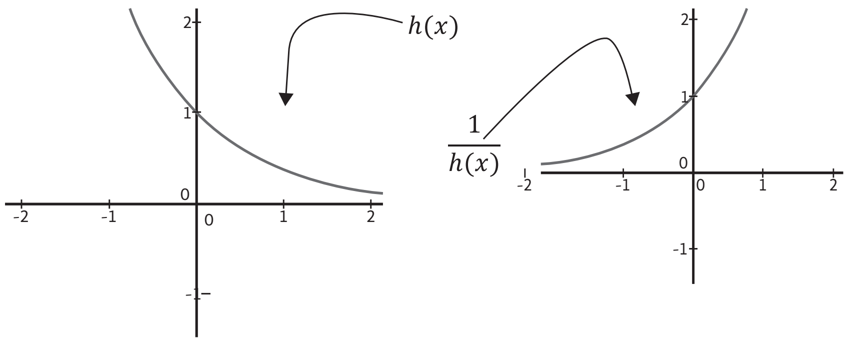


Observemos que $f(x)$ presenta un máximo en $x = a$ y, por consiguiente, es cóncava hacia abajo en las cercanías de este punto. Luego, por lo analizado anteriormente, $\frac{1}{f(x)}$ tendrá un mínimo en $x = a$, siempre que $f(x) \neq 0$ para todo x que pertenezca a una vecindad de a, por tanto será cóncava hacia arriba en las inmediaciones de este punto, siendo su gráfica:



De forma análoga, en un mínimo, $f(x)$ es cóncava hacia arriba, por tanto, $\frac{1}{f(x)}$ será cóncava hacia abajo, pues presentará un máximo.

En otro tipo de funciones no es tan evidente la relación entre la concavidad de la función y la de su recíproca, basta analizar la gráfica de la función h y la de su recíproca.

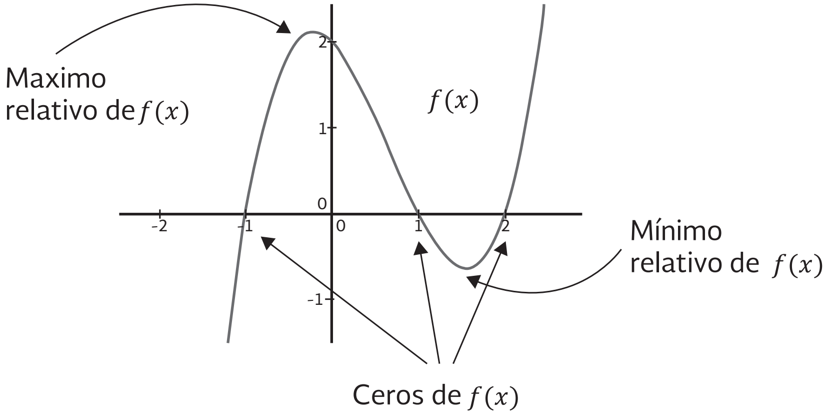


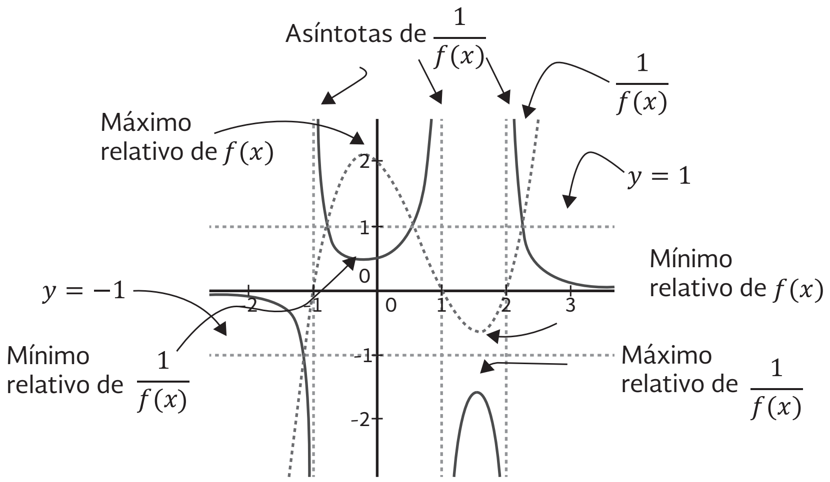
Observamos que, tanto $h(x)$ como su recíproca, son cóncavas hacia arriba, y que ninguna de las dos presenta un punto de inflexión, es decir, un punto donde cambien su concavidad.

Ejemplo:

A partir de este análisis, y a modo de ejemplo, proponemos el siguiente ejercicio:

Hallar el recíproco de $f(x)$ a partir de su gráfica.

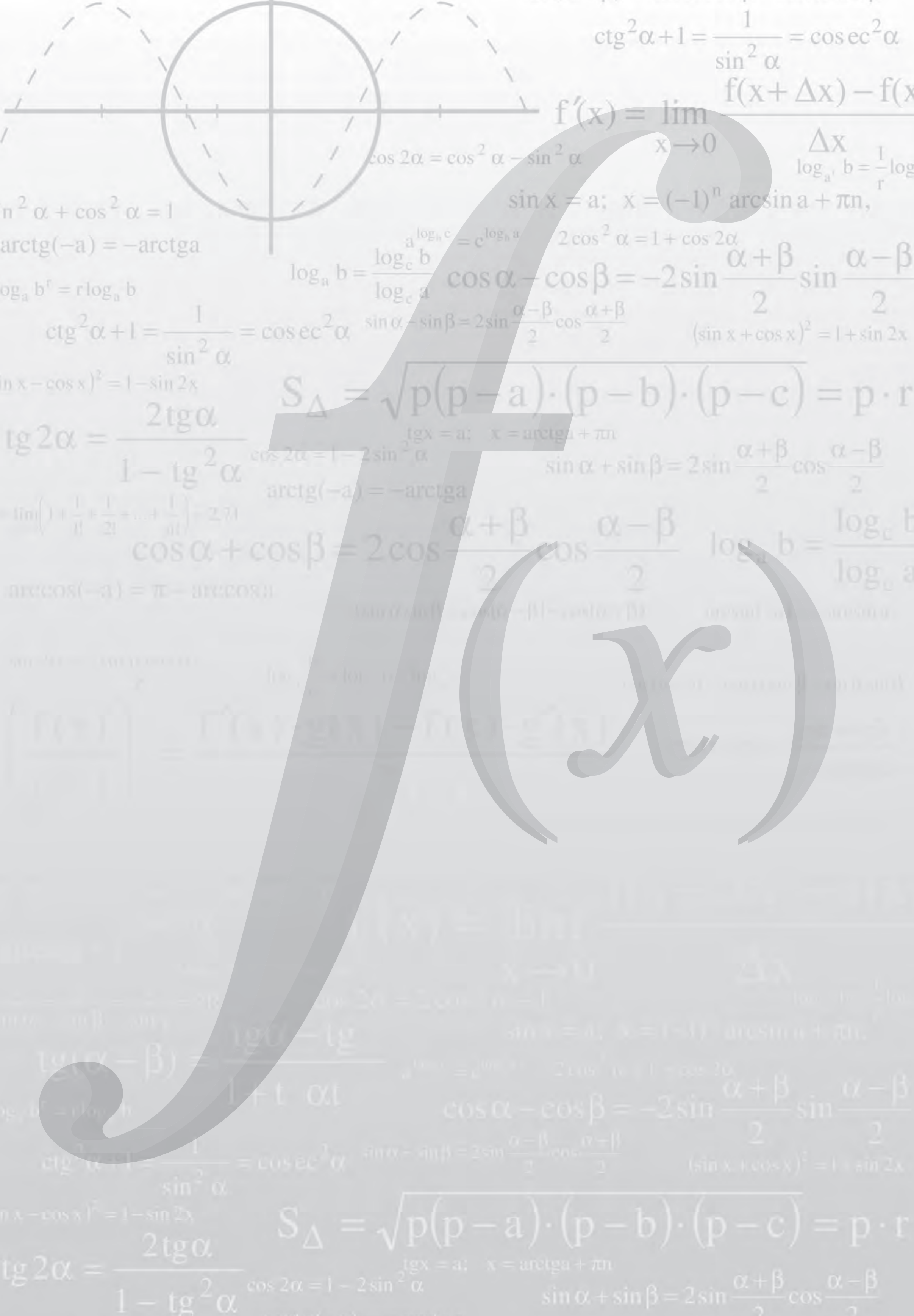




Consideramos que la pertinencia de este tipo de problemas, respecto de su inclusión en los programas de precálculo, radica en que, dotar al alumno de un buen manejo del lenguaje gráfico, facilita la comprensión y apropiación de nuevos conceptos de cálculo.

En particular, el estudio del recíproco de una función permite reflexionar acerca de ciertas nociones, como asíntotas, ceros, máximos y mínimos, continuidad y sobre lo que sucede con ellas al aplicar esta operación.

Al resolver este tipo de ejercicios, el alumno se ve obligado a pensar qué sucede ante, por ejemplo, un cero o asíntota. Este hecho lo acerca a conceptos de límite y sucesiones, sin estar trabajando con ellos de manera explícita. Debe analizar lo que ocurre cuando $f(x)$ se hace cada vez más pequeña (cero), o cada vez más grande (asíntotas) y al aplicarle el recíproco, manejar ideas de "tiende a...", "se acerca a..." Por tanto, contribuye a formar una "base" donde sustentar nociones tales como límite, continuidad, máximos y mínimos, entre otros, inherentes al cálculo. El lograr un pasaje fluido y espontáneo entre estos dos lenguajes (gráfico y analítico), permite una mayor comprensión de las ideas subyacentes.



RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES

Es innegable que la dificultad técnica que se presenta al resolver desigualdades obstaculiza su comprensión y su enseñanza, y reduce su presentación escolar a unos cuantos ejemplos "complejos" con el fin de completar el programa establecido. Por otra parte, las habilidades algebraicas y lógicas que desarrolla la minoría no contribuyen, sustancialmente, a un posterior estudio del cálculo. Nuestra estrategia para abordar en la escuela este tema estriba en el cambio de centralidad del contexto protagónico de la discusión, es decir, iniciamos el tratamiento en el contexto gráfico para trasladarnos hacia el contexto algebraico cuyo fin es apoyar argumentaciones o construcciones gráficas.

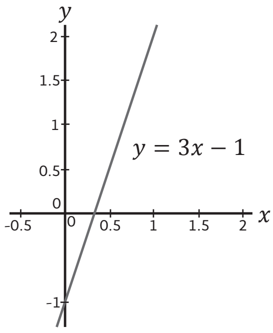
A lo largo de esta sección encontrarán gráficas creadas con una herramienta de apoyo, el software de graficación GeoGebra, el cual es un software libre y dinámico multiplataforma para todos los niveles de educación, que une la geometría, el álgebra, la estadística y el cálculo. En las referencias bibliográficas puede encontrarse la dirección electrónica para descargarse.

También involucramos el contexto numérico para conjeturar soluciones e ir estableciendo márgenes de aproximación que propician el fortalecimiento de la intuición numérica de los estudiantes. En lo que sigue veremos algunos ejemplos que el lector puede consultar en Farfán, Albert y Arrieta (2001), para mayores detalles.

El problema de resolver una desigualdad de incógnita x, radica en encontrar todos los números reales que, al sustituirlos por x, verifican la desigualdad dada. Tales números son las soluciones de la desigualdad, ellos forman el conjunto de soluciones que generalmente es un intervalo. Hagamos una analogía con la resolución de ecuaciones.

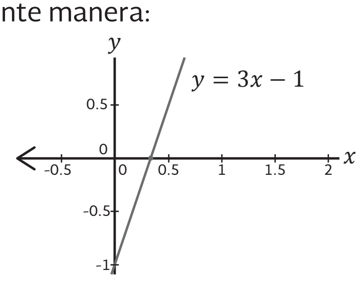
Resolver la ecuación: $3x - 1 = 0$

Es encontrar el valor de x para el cual el término $3x - 1$ es nulo; el problema planteado en una gráfica se interpreta como el de encontrar la intersección de la recta $y = 3x - 1$ con el eje x, esto se muestra en la siguiente gráfica.



Gráfica de $y = 3x - 1$

El valor de x requerido es $\frac{1}{3}$, es decir, que para dicho valor el término $3x–1$ se anula; en la gráfica, para ese valor de x, la recta y el eje coinciden, por tanto la solución se expresa como $x = \frac{1}{3}$.
Al introducir el término "desigualdad" se introducen los símbolos "$<$ " (menor que), " $>$ " (mayor que), " $\leq$ "(menor o igual que) y " $\geq$" (mayor o igual que), que permiten que la solución sea un número, como en el caso de las ecuaciones, o bien, un conjunto de números e incluso varios conjuntos. De modo que al solicitar la solución de la desigualdad $3x - 1 < 0$ observamos en la gráfica que para todos los números del **eje *x*** situados a la izquierda de $\frac{1}{3}$ (es decir, menores que $\frac{1}{3}$) los valores del término $3x–1$ están por debajo del **eje *x*** (es decir, son menores que cero), por lo que la solución es un conjunto de números, a saber, el constituido por todos los números reales que sean estrictamente menores que $\frac{1}{3}$. Así la solución es el intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, gráficamente se ve de la siguiente manera:



Solución de gráfica de $3x - 1 < 0$

Reflexionemos sobre el procedimiento anterior:

Hemos establecido una comparación entre la gráfica de la recta $y = 3x - 1$ y el **eje *x*** cuya ecuación es $y = 0$; la comparación fue dada por el símbolo "<" y nos preguntamos ¿a partir de qué número, la gráfica de la recta $y = 3x - 1$ está por debajo de la gráfica de la recta $y = 0$?

Hemos traducido "<", usado en la expresión algebraica por "debajo de" y se puede inferir la traducción de ">" por "arriba de" en el contexto gráfico, del mismo modo en que la igualdad se traduce como intersección (coincidencia).

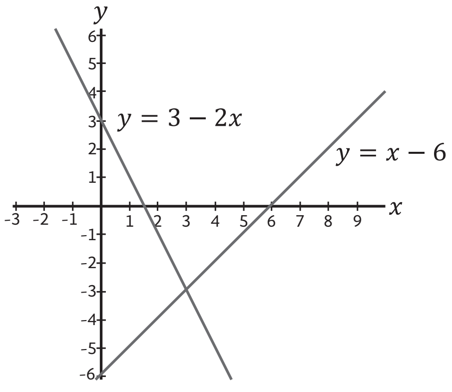
De este ejemplo observamos que en general, a diferencia de las ecuaciones, al resolver una desigualdad nos vemos obligados a exhibir un conjunto de números y que en el contexto gráfico (que usaremos como ambiente de trabajo) resolver una desigualdad será encontrar a partir de qué número (sobre el eje x) la comparación inducida por los símbolos ("$<$", "$>$", "$\leq$", "$\geq$") da lugar a la comparación ("debajo de", "arriba de", "debajo de y en la intersección", "arriba de y en la intersección") de los lugares geométricos involucrados.

Problema 1

Resolver por el método antes usado la siguiente desigualdad

$$3 - 2x \geq x - 6$$

Graficamos las rectas $y = 3 - 2x$ y $y = x - 6$ en un mismo plano cartesiano.



Gráficas de las rectas $y = 3 - 2x$ y $y = x - 6$

La gráfica de $y = 3{-}2x$ está por encima de la gráfica de la recta $y = x{-}6$ hasta el punto de intersección cuya abscisa (es decir, x) es 3, después de tal valor la situación se invertirá; así que la solución es el intervalo (-∞, 3).

Problemas propuestos

1. Resuelva las siguientes desigualdades:

a) $2x + 7 > 3$ *Solución: el intervalo* $(-2, \infty)$

b) $1 + 5x > 5 - 3x$ *Solución: el intervalo* $(\frac{1}{2}, \infty)$

c) $x > 1 - x \geq 3 + 2x$ *No tiene solución*

d) $0 \leq 1 - x < 1$ *Solución: el intervalo* $(0,1)$

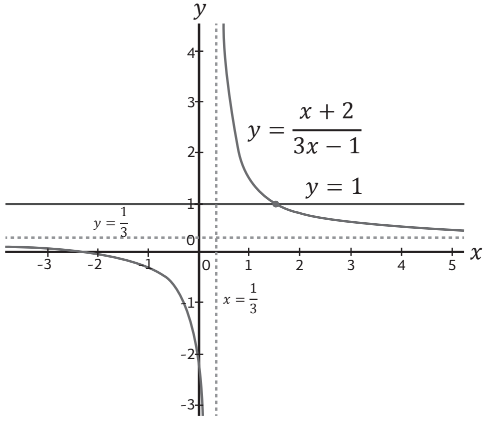
Problema 2

Resolver la siguiente desigualdad

$$\frac{x + 2}{3x - 1} \leq 1$$

Al graficar $y = \dfrac{x + 2}{3x - 1}$ y $y = 1$ en un mismo plano cartesiano obtenemos una hipérbola cuyas asíntotas vertical y horizontal son

$x = \dfrac{1}{3}$ y $y = \dfrac{1}{3}$ respectivamente.



Gráficas de las rectas $y = \frac{x+2}{3x-1}$ y $y = 1$

El punto de intersección entre la recta y la hipérbola es el punto de coordenadas $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$, obtenido al resolver la ecuación $\frac{x+2}{3x-1} = 1$.

La gráfica de $y = \frac{x+2}{3x-1}$ está por debajo de la recta para todos los valores de x, salvo los comprendidos en el intervalo $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$, es decir, la solución son todos los números del conjunto $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Nótese que no hemos considerado al número $\frac{1}{3}$, en ningún caso, ni para el conjunto solución ni para el conjunto que no lo es. Ello se debe a que $\frac{1}{3}$ no forma parte del dominio de la función, esto es, no hay ningún valor asignado que provenga de una evaluación en $x = \frac{1}{3}$; luego, no es posible hacer ninguna comparación. De hecho, excluiremos del conjunto solución todos los números que no pertenezcan al dominio de la función, en este caso aquellos para los cuales se tenga una división entre cero.

Problemas propuestos

1. Resolver las siguientes desigualdades.

a) $\frac{5x-2}{x+1} \geq -x + 1$

Solución: el conjunto $(x_1, -1) \cup (x_2, \infty)$
donde $x_1 \approx 5.54138126$;
$x_2 \approx 0.54138126$.

b) $-x < \frac{5x-2}{x+1} < -2x + 3$

Solución: el conjunto $(x_1, x_2) \cup (x_3, x_4)$
donde $x_1 \approx -6.31662479$;
$x_2 \approx -2.870828693$;
$x_3 \approx 0.31662479$;
$x_4 \approx 0.8708286933$.

De los ejemplos anteriores se desprende una interrogante ¿por qué la gráfica de un cociente de rectas es una hipérbola? Responder a ello nos permite graficar dicho cociente sin recurrir necesariamente a una calculadora para resolver este tipo de desigualdades.

Consideremos a, b, c y d constantes de modo que la pregunta que hemos planteado es equivalente a la siguiente:

¿Cuál es la gráfica de la función $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$?

Si acaso $c \neq 0,\ b = d = 0$, entonces $y = \dfrac{ax}{cx} = \dfrac{a}{c}$, cuya gráfica es una recta paralela al eje x, puesto que $\dfrac{a}{c}$ es una constante. Pero si b o d no son ambas cero (a y c son diferentes de cero) la situación difiere, y el cociente puede expresarse como

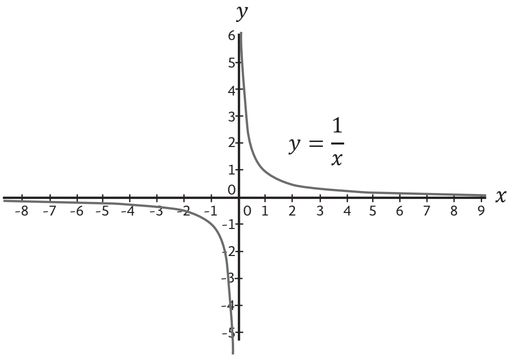
$$y = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c}}{cx + d}$$

que se obtiene al hacer la división

$$\begin{array}{r|l} & \quad \dfrac{a}{c} \\ \hline cx + d & ax + b \\ & -ax \quad -\dfrac{ad}{c} \\ \cline{2-2} & \qquad b \quad -\dfrac{ad}{c} \end{array}$$

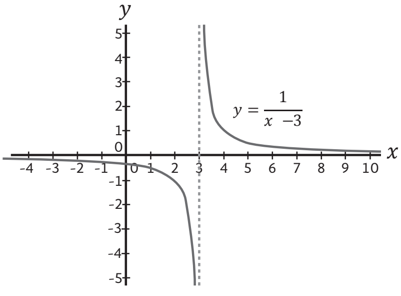
Pero ¿por qué $y = \dfrac{a}{c} + \dfrac{\frac{bc - ad}{c}}{cx + d}$ es una hipérbola?

Nuestro patrón asociado a una hipérbola es el de $y = \dfrac{1}{x}$ como se muestra en la gráfica.



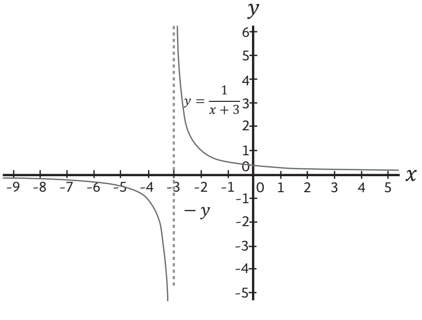
Gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$

Si ahora recorremos la gráfica hacia la derecha, o bien, hacia la izquierda, esto es, $y > 0$ o $y < 0$ unidades, obtendremos por ejemplo con $y = 3$ la gráfica siguiente.



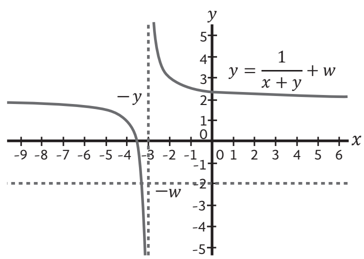
Gráfica de $y = \dfrac{1}{x-3}$

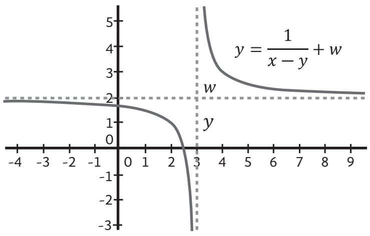
Si $y < 0$, por ejemplo $y = -3$, entonces la gráfica se ve como sigue.



Gráfica de $y = \dfrac{1}{x+3}$

Y si estas hipérbolas las desplazamos hacia arriba o hacia abajo en $w > 0$ unidades, tendremos, respectivamente:





Gráfica de $y = \dfrac{1}{x+y} + w$

En donde las asíntotas fueron modificadas por dichos desplazamientos.

Así, en $y = \dfrac{a}{c} + \dfrac{\frac{bc-ad}{c}}{cx+d}$ las asíntotas son $y = \dfrac{a}{c}$ y $x = -\dfrac{d}{c}$.

El factor $\dfrac{bc-ad}{c}$, siendo una constante, modificará la curva contrayéndola o dilatándola, pero sin alterar su forma esencial, salvo por el signo que, si es negativo, significará una reflexión respecto del eje x.

Problemas propuestos

1. Considere la función f definida por $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$

i) Trace la gráfica de f.

ii) Resuelva la desigualdad $f(x) \geq 1$.

Solución: $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$

iii) Resuelva la desigualdad $f(x) \leq -x-1$.

Solución: $\left(-\infty, \dfrac{-4-2\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-1, \dfrac{-4+2\sqrt{2}}{2}\right)$

Problema 3

Resolver la siguiente desigualdad gráficamente. Puede apoyarse de algún software de graficación.

$$\frac{1}{3}x + 1 \geq |x|$$

Resolvemos con ayuda de GeoGebra

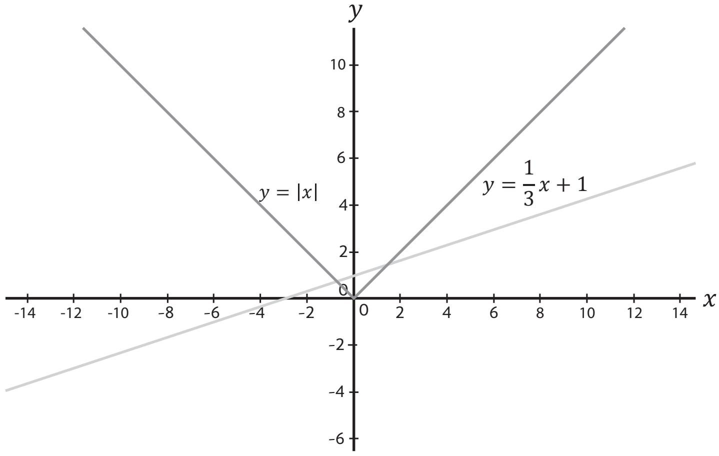
La desigualdad que nos planteamos resolver es $\frac{1}{3}x + 1 \geq |x|$, la cual traducimos a la siguiente pregunta: ¿Cuándo la gráfica de $y = \frac{1}{3}x + 1$ está encima o es igual a la gráfica de $y = |x|$? para responder esta pregunta trazaremos ambas gráficas con ayuda de GeoGebra y observaremos detenidamente ambos comportamientos de la gráfica, con base en dichas observaciones y nuestros conocimientos argumentaremos la respuesta.

Al abrir GeoGebra aparecerá una pantalla como la siguiente. En las referencias encontrará la dirección electrónica de una guía rápida para el uso de este software. Debe consultarla para que pueda realizar con éxito el ejercicio que aquí desarrollaremos.

Figura 5. Imagen del área de trabajo de GeoGebra.

Graficamos en un mismo plano cartesiano las funciones $y = \frac{1}{3}x + 1$ y $y = |x|$. Para ello basta escribir estas expresiones en la barra de entrada que se muestra en la imagen anterior y presionar *enter*; aparecerán las gráficas correspondientes en la vista gráfica y en la vista algebraica sus expresiones correspondientes. Tenga en cuenta que para la expresión valor absoluto deberá escribir en la barra de entrada lo siguiente y=abs(x).

Las gráficas se verán como sigue:



Gráficas de $y = \frac{1}{3}x + 1$ y $y = |x|$

Observemos con atención las gráficas y tengamos en mente nuestra pregunta ¿Cuándo la gráfica de $y = \frac{1}{3}x + 1$ (gris claro) está encima o es igual a la gráfica de $y = |x|$ (gris oscuro). En las gráficas se observa claramente que es un pequeño intervalo en donde esto ocurre, a saber, en el determinado por los puntos de intersección de ambas gráficas, es decir, en este intervalo las imágenes de la gráfica $y = \frac{1}{3}x + 1$ son menores que las imágenes de la gráfica $y = |x|$. Al parecer ya tenemos asegurada nuestra respuesta, sin embargo, nos falta dar los datos precisos de este intervalo es decir, qué valores lo determinan. Para ello con ayuda del software determinamos dichos puntos de intersección (con la herramienta intersección de dos puntos), al trazarlos en la gráfica (vista gráfica) aparecen sus coordenadas en la vista algebraica. Así hallamos que las gráficas se intersectan en $x = -\frac{3}{4}$ y $x = \frac{3}{2}$. Tome en cuenta que los valores que escribe el programa son en decimales aproximados, por ejemplo, al dar las coordenadas de los puntos de intersección en el caso del punto B escribe B=(1.49,1.49), pero en realidad se trata de B=(1.5,1.5). Esto es un claro ejemplo de que no debemos confiar totalmente en el software; a veces se presentan situaciones como éstas que podemos sortear con los conocimientos que poseemos, en este caso, para corroborar los valores exactos, puede procederse algebraicamente.

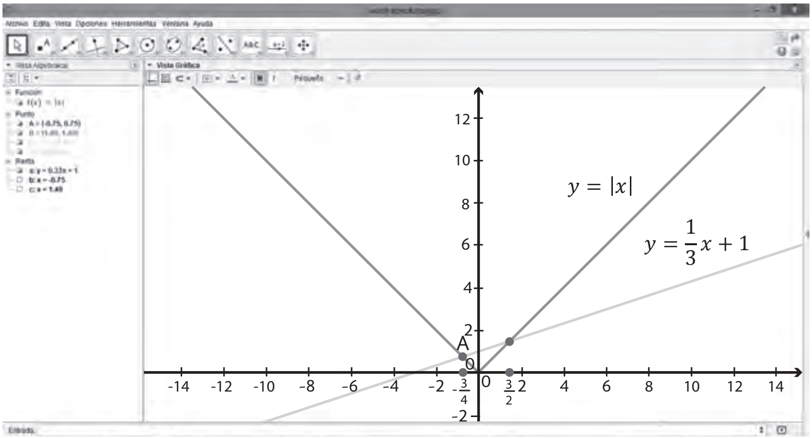
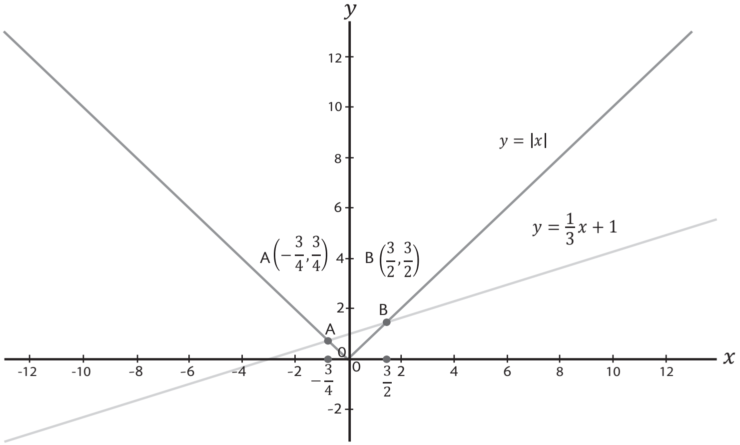


Figura 6. Vistas del área de trabajo de GeoGebra.

Una vez corroborados los valores encontramos que la solución es el intervalo $\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right]$, se trata de un intervalo cerrado porque los extremos son parte de la solución, recordemos que se trataba de una desigualdad con el signo ≥.



Solución gráfica de $\frac{1}{3}x + 1 \geq |x|$.

De esta forma la respuesta a la pregunta: ¿cuándo la gráfica de $y = \frac{1}{3}x + 1$ está encima o es igual a la gráfica de $y = |x|$? es el intervalo $\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right]$, lo que implica la solución de la desigualdad.

Problema 4

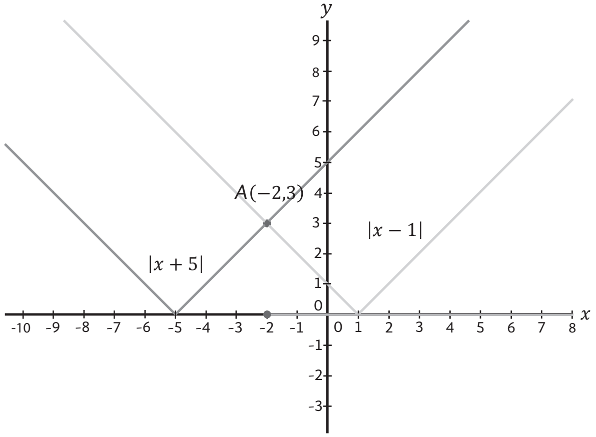
Resolver la siguiente desigualdad

$$|x - 1| < |x + 5|$$

Resolvemos con ayuda de GeoGebra

La desigualdad que nos planteamos resolver ahora involucra dos expresiones con valor absoluto, se trata de $|x - 1| < |x + 5|$, esta desigualdad se traduce en la pregunta: ¿cuándo la gráfica de $y = |x - 1|$está por debajo de la gráfica de $y = |x + 5|$? Para responder esta pregunta procedemos como en los ejercicios anteriores con ayuda de GeoGebra (de no contarse con el software pueden esbozarse las gráficas con lápiz y papel), trazamos ambas gráficas y observamos detenidamente al mismo tiempo que hacemos conjeturas para dar respuesta.

Las gráficas que deben obtenerse son las siguientes.



Gráficas de $y = |x - 1|$ y $y = |x + 5|$

Observamos que las gráficas se intersectan en A, y es precisamente a partir del punto de intersección cuando la gráfica de $y = |x - 1|$ (gris claro) está por debajo de la gráfica de $y = |x + 5|$(gris oscuro), esto significa que la solución de la desigualdad $|x-1| < |x+5|$ es el intervalo (-2,∞), es abierto porque en $x = -2$ ambas gráficas tienen la misma imagen.

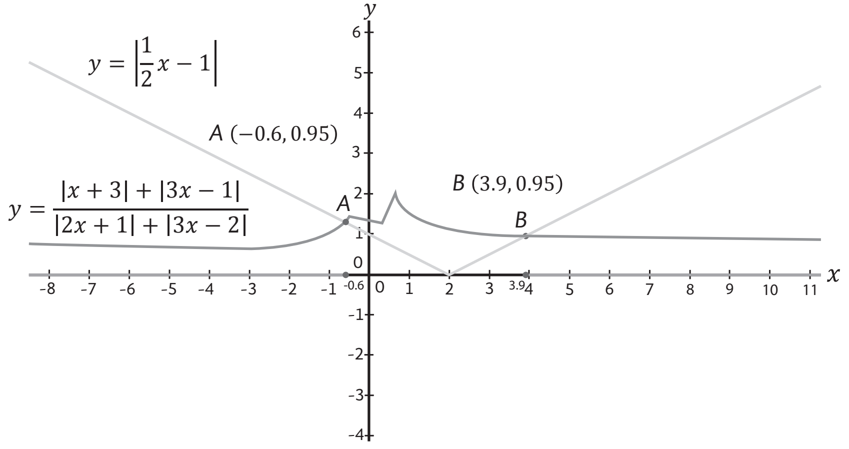
Problema 5

Resolver la siguiente desigualdad

$$\frac{|x+3|+|3x-1|}{|2x+1|+|3x-2|} \leq \left|\frac{1}{2}x-1\right|$$

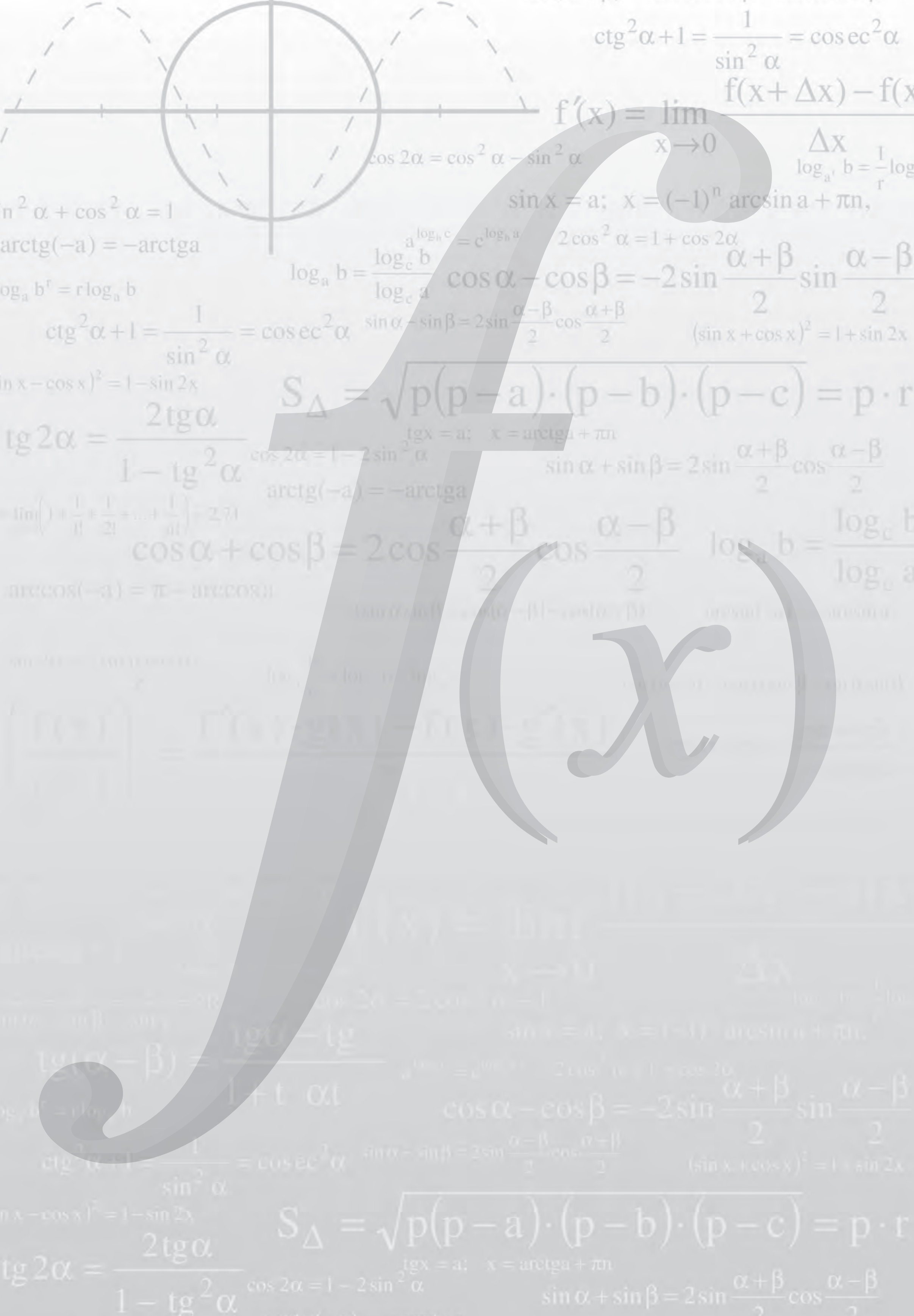
Resolvemos con ayuda de GeoGebra

La desigualdad por resolver nos plantea la pregunta: ¿cuándo la gráfica de $y = \frac{|x+3|+|3x-1|}{|2x+1|+|3x-2|}$ está por debajo o es igual a la gráfica de $y = \left|\frac{1}{2}x-1\right|$? Procedemos a graficar ambas funciones en el mismo plano coordenado.



Gráficas de $y = \frac{|x+3|+|3x-1|}{|2x+1|+|3x-2|}$ y $y = \left|\frac{1}{2}x-1\right|$

Recordemos que la pregunta planteada es ¿cuándo la gráfica de la función $y = \frac{|x+3|+|3x-1|}{|2x+1|+|3x-2|}$ (gris oscuro) está por debajo o es igual a la gráfica de la función $y = \left|\frac{1}{2}x-1\right|$ (gris claro)? Al observar la gráfica anterior encontramos que antes de $x = -0.6$, y después de $x = 3.9$, que son las abscisas de los puntos de intersección, la gráfica gris oscuro está por debajo de la gráfica gris claro, y que en dichos puntos las imágenes de ambas son iguales. Cabe destacar que con ayuda de la herramienta "punto de intersección" de GeoGebra se pueden determinar los valores de los puntos de intersección. El intervalo que da solución a la desigualdad $\frac{|x+3|+|3x-1|}{|2x+1|+|3x-2|} \leq \left|\frac{1}{2}x-1\right|$ es $(-\infty, -0.6 \cup 3.9, \infty)$.



PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS SIN USAR CÁLCULO

En general, cuando el modelo de un problema es un modelo cuadrático, tendremos como gráfica una parábola que tiene un máximo o un mínimo según el signo del coeficiente de x^2. Este máximo o mínimo coincide con las coordenadas del vértice. En forma general, una función cuadrática es de la forma

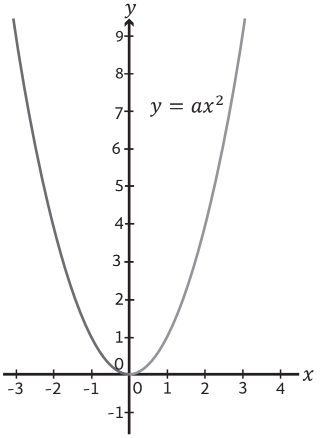
$$f(\mathrm{x})=ax^2+bx+c, \text{ con } a \neq 0;$$

al completar el cuadrado obtenemos una expresión equivalente

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

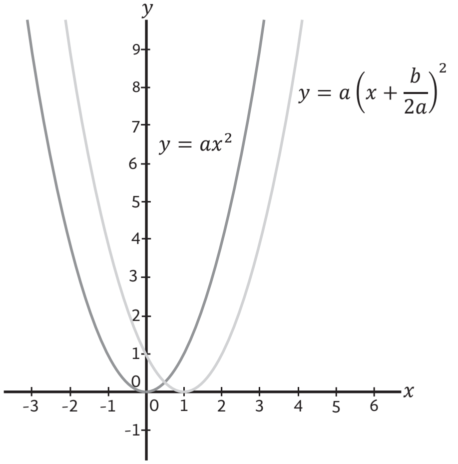
Los parámetros $\frac{b}{2a}$ y $\frac{4ac-b^2}{4a}$ de esta función pueden identificarse como un desplazamiento horizontal y otro vertical respectivamente de la gráfica de la parábola $y = ax^2$. Ilustremos esta afirmación considerando dos casos, con a positivo y a negativo.

Partimos de la parábola $y = ax^2$, como se muestra en la gráfica.



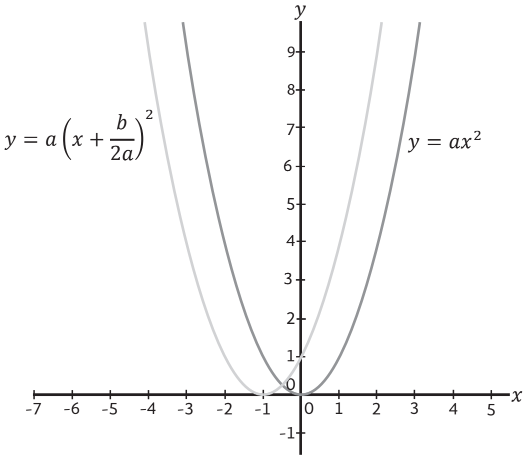
Gráfica de $y = ax^2$

Consideremos el caso en el que $a > 0$ y $b < 0$, veamos qué pasa con la gráfica de la función, en este caso consideramos a=1 y b=-2.



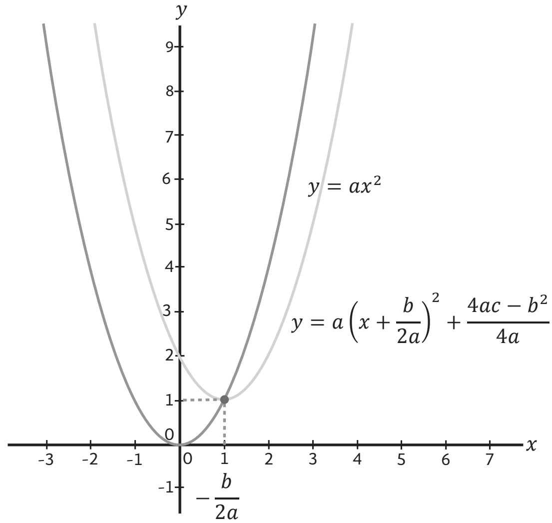
Desplazamiento hacia la derecha ($b < 0$) de $y = ax^2$.

Ahora consideramos el caso en el que a > 0 y $b > 0$, veamos qué pasa con la gráfica de la función, en este caso consideramos a =1 y b =2.

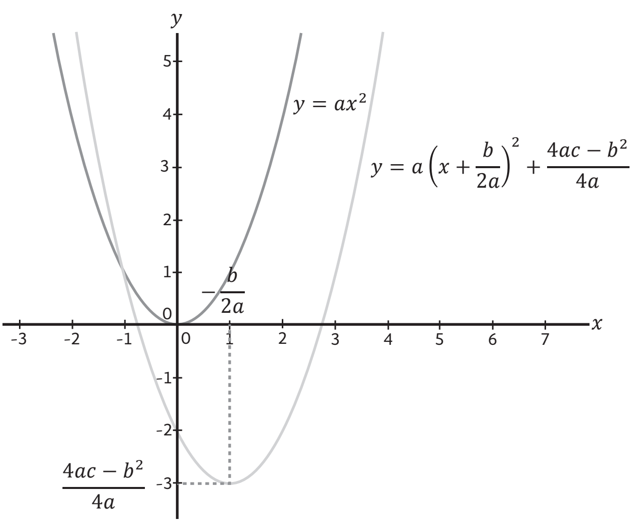


Desplazamiento hacia la derecha ($b > 0$) de $y = ax^2$.

El desplazamiento de la parábola hacia arriba o hacia abajo está en función del signo de $4ac - b^2$, si éste es positivo, el desplazamiento será hacia arriba, si $4ac - b^2$ es negativo el desplazamiento será hacia abajo, a continuación se muestra este hecho gráficamente.



Desplazamiento de la gráfica hacia arriba $(4ac - b^2 > 0)$.



Desplazamiento de la gráfica hacia abajo $(4ac - b^2 < 0)$.

Observe que en ambos casos el valor de la ordenada del vértice es la evaluación de la función f en $x = -\frac{b}{2a}$, esto es:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

En resumen, si $a > 0$ se tiene un mínimo, que es el vértice de la parábola, cuyas coordenadas son $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Para cuando $a < 0$ se tiene un máximo, que es el vértice, y cuyas coordenadas son $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Justifique esta afirmación y úsela para resolver los siguientes problemas.

Problemas propuestos

1. Resuelva los siguientes problemas.

a) En una comunidad, la rapidez con la que una noticia se difunde es proporcional al número de personas que han escuchado la noticia y al número de personas que no la han escuchado. Demuestre que la noticia se difunde con la máxima rapidez cuando la mitad de la población tiene conocimiento de ella.

b) Encuentre dos números positivos cuya suma sea 5 y tales que la suma de sus cuadrados sea mínima.

Solución: *Si denotamos por* x *y* y *a tales números positivos, entonces* $x = y = 2.5$ *y la suma mínima de sus cuadrados es* 12.

Ahora resolveremos el siguiente problema

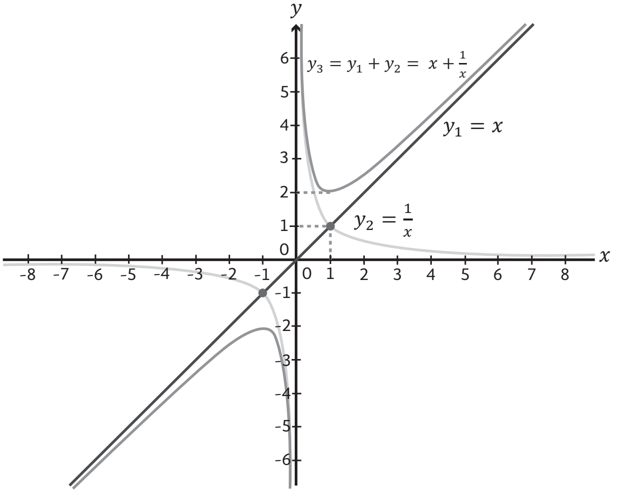
Problema 6

¿Cuál es el número positivo tal que al sumarle su recíproco, su suma es mínima?

Denotamos por x dicho número; entonces su recíproco es $\frac{1}{x}$, de modo que la suma requerida será $x + \frac{1}{x}$. Esta suma es una función de x, por tanto decimos que $f(x) = x + \frac{1}{x}$, debemos encontrar el número que minimiza a esta función, para esto trabajemos con f como la suma de una recta y una hipérbola y planteamos como hipótesis que la abscisa de la intersección es el número que minimiza la función.

Resolvemos con ayuda de GeoGebra

Tracemos las gráficas de las funciones $y_1 = x$; $y_2 = \frac{1}{x}$ y $y_3 = y_1 + y_2$.



Gráficas de la funciones $y_1 = x$; $y_2 = \frac{1}{x}$ y $y_3 = y_1 + y_2$

Puede observarse en la gráfica que el punto de intersección de y_1 y y_2 es (1,1), de modo que si evaluamos $x = 1$ en y_3 obtenemos que $y_3\ (1) = 2$. ¿Por qué no tomamos en cuenta el otro punto de intersección?

Hagamos una tabla para valores de x menores y mayores que 1.

Valores de $x < 1, x \neq 0$

x	y_1	y_2	y_3
.84	.84	1.18	2.02
.57	.57	1.72	2.30
.36	.36	2.71	3.08
.15	.15	6.33	6.49
.05	.05	19.0	19.05

Valores de $x > 1$

x	y_1	y_2	y_3
1.21	1.21	.82	2.03
1.52	1.52	.65	2.18
2	2	.5	2.5
3	3	.33	3.33
10	10	.1	10.1

Para valores de x entre 0 y 1 observamos que conforme x es más pequeño, la diferencia entre y_2 y y_3 disminuye; en otras palabras, y_2 y y_3 se parecen, tienen la misma tendencia a crecer, de suerte tal que en el intervalo $(0,1)$ no habrá un punto cuya imagen sea menor que $y_3\ (1) = 2$. A la derecha de 1, vemos en la tabla (y también en la gráfica) que la diferencia entre y_1 y y_3 es menor a medida que x es más grande, es decir, y se acerca cada vez más a la recta (a eso se le llama comportamiento asintótico), por lo que no hay un mínimo de y_3 en el intervalo $(1, \infty)$.

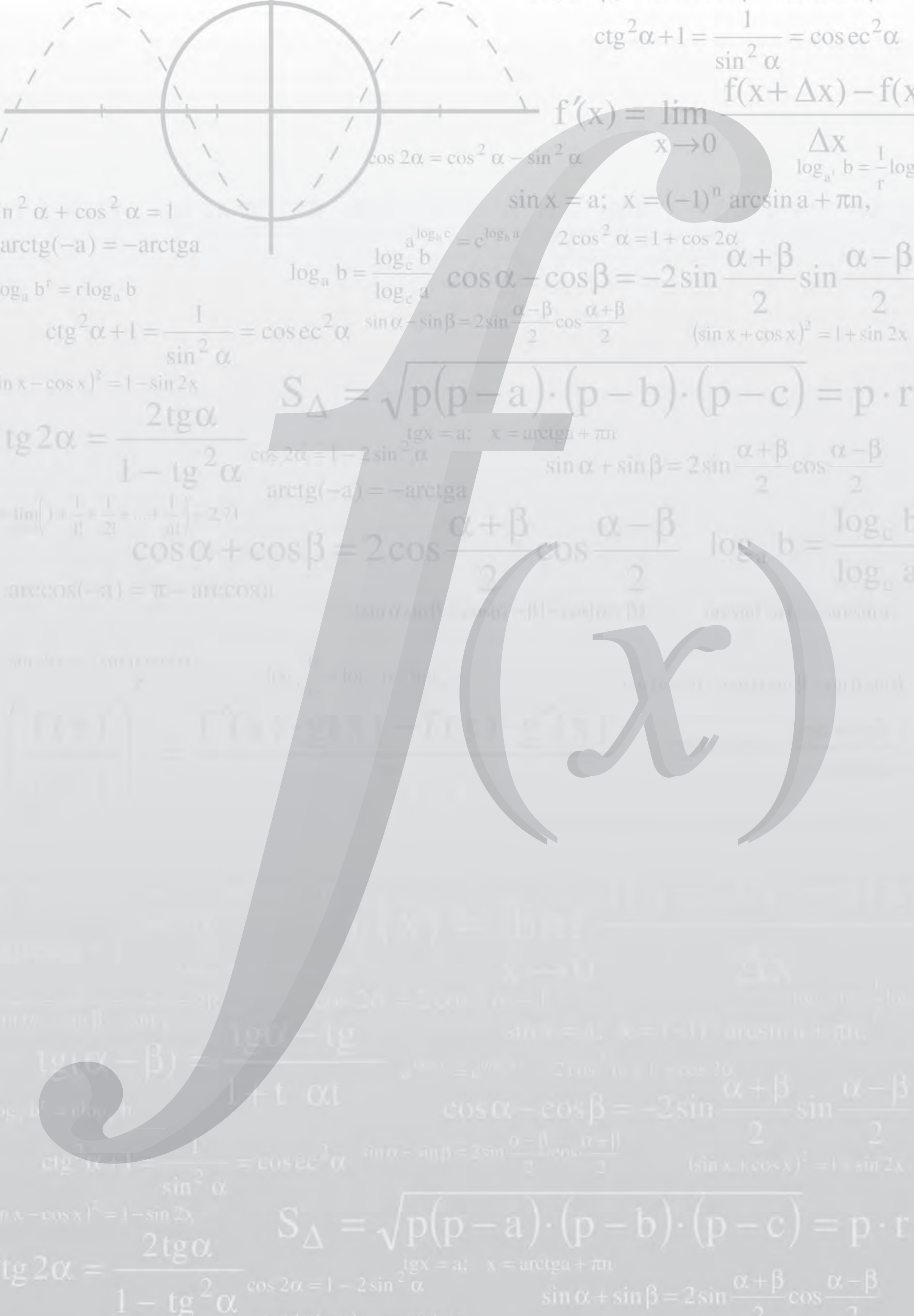
Así, el único valor mínimo de y_3 para $x > 0$ es el punto $(1, 2)$. El número que resuelve el problema planteado es $x = 1$, esto es, 1 es el número positivo tal que al sumarle su recíproco, su suma es mínima.

Problemas propuestos

1. Encuentre el máximo de la función definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ en el intervalo $(0, \infty)$. Sugerencia: observe que $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2+1}{x}$

Solución: el punto de coordenadas $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

2. Dos lados de un triángulo tienen una longitud de 5m. ¿Qué longitud debiera tener el tercer lado a fin de encerrar la máxima área posible?


$\mathrm{ctg}^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\mathrm{cosec}^2\alpha$
$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$\sin x=a;\quad x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,$
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
$\mathrm{arctg}(-a)=-\mathrm{arctg}\,a$
$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$
$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$
$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\log_a b^r=r\log_a b$
$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
$(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x$
$(\sin x-\cos x)^2=1-\sin 2x$
$S_\Delta=\sqrt{p(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}=p\cdot r$
$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$
$\mathrm{tg}x=a;\quad x=\mathrm{arctg}\,a+\pi n$
$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$
$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$f(x)$

MISCELÁNEA DE PROBLEMAS

Ahora proponemos una serie de problemas y ejercicios, para su solución puede optar por el uso de algún software de graficación como GeoGebra o algún otro que conozca, le recomendamos que aunque trabaje con el registro gráfico contraste sus resultados con el registro algebraico o numérico.

1. Sea la función definida en $\Re$ por $f(x) = x2 - 3\mathrm{x} + 5$.

1.1 Escriba $f(x)$ en la forma $(x-a)^2+\mathrm{b}$, en donde a y b son dos números reales por determinar.

1.2 Muestre que f es una función decreciente sobre el intervalo $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$ y creciente en $\left(\frac{3}{2},\infty\right)$.

1.3 Construya una tabla de las variaciones de f, así como su correspondiente gráfica.

1.4 Muestre que para todo x en $(3\ ,\ 5)$, se satisface que

$|f(x) - f(3)| \leq 5\ (x - 3)$.

2. Uno puede resolver el siguiente sistema usando dos métodos diferentes:

$$S\begin{cases} -\dfrac{1}{x} + y = 2 \\ \\ \dfrac{2}{x} + y = -1 \end{cases}$$

***i)* Primer método**

Para determinar las soluciones de S, sustituimos $\dfrac{1}{x}$ por X para $x \neq 0$

¿Qué sistema obtenemos?

Resuelva ese sistema y deduzca el punto de coordenadas (x,y), solución de S.

***ii)* Segundo método**

Consideremos las funciones f y g definidas en $\Re$ por $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$

y $g(x) = -\dfrac{2}{x} - 1$. Trace ambas gráficas y reencuentre el resultado dado en i).

3. Resuelva las siguientes desigualdades: $x^2 - 3x - 3 > x^2 + 7x - 13$

i) $x^{\text{in (sen } x)} \geq 1$ — *Solución: el intervalo* $(0{,}1)$.

ii) $\sqrt{5 - 2\operatorname{sen} x} \geq 6 \operatorname{sen} x - 1$ — *Solución: todos los intervalos de la forma* $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$, *para* $k = 1{,}2, \ldots$

iii) $|x^2 + 3x| + x^2 - 2 \geq 0$ — *Solución: el conjunto* $(-\infty, -2/3) \cup (1/2, \infty)$.

iv) $|x^2 - 3x - 3| > |x^2 + 7x - 13|$ — *Solución: el conjunto* $(-\infty, -4) \cup (1, 2)$.

v) $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| < 1$ — *Solución: el conjunto* $(0{,}1.6) \cup (2.5, \infty)$.

vi) $\left|\frac{|x^2-2x|+5}{x^2+|x+4|}\right| > 1$ — *Solución: el intervalo* $(-\infty, 1)$.

vii) $\sqrt{6 - 5x - x^2} \geq x$ — *Solución: el intervalo* $(-6, .88)$.

viii) $\frac{x^2+1}{x} \leq x$ — *Solución: el intervalo* $(-\infty, 0)$.

ix) $x \operatorname{sen} x \leq x$ si $-4 \leq x \leq 4$ — *Solución: ambas gráficas se intersecan para* $x = 0$ *y* $x = \pi/2$, *por lo que la condición se satisface en el intervalo* $(0, 4)$

x) $\frac{1}{2x} \leq 2x$ — *Solución: el conjunto* $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$.

xi) $\log_2(1 - x^2) \leq 0$ — *Sugerencia: recuerde que* $\log_b N = \log_a N / \log_a b$. *Solución: el intervalo (-1,1).*

xii) $|\operatorname{sen} x| + |\cos x| \geq 1$ — *Solución:*$\mathfrak{R}$.

xiii) $\log_{\operatorname{sen} x} 1/2 \geq 0$

Solución: todos los intervalos $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, *en donde* $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *en los extremos no está definida la función*

xiv) $x^2 - 2|x| - 3 \leq 0$

Solución: el intervalo $(-3, 3)$.

xv) $\frac{|x-3|+|x+1|}{|x+3|+|x-1|} \geq 1$

Solución: el intervalo $(-\infty, 1)$.

4. La aceleración debida a la fuerza de gravedad no es precisamente constante; depende de la distancia al centro de la Tierra. Así si denotamos por $g(0)$ y $g(h)$ a la aceleración debida a la fuerza de gravedad respecto del suelo y a la altura h y por R la distancia de un punto de la superficie al centro de la Tierra, entonces tenemos que $g(h)$ está dada por la siguiente ecuación:

$$g(h) = g(0)\frac{R^2}{(R+h)^2}$$

en la que R y h son expresados con la misma unidad.

a) Pruebe que $g(h)$ se puede escribir como $g(h)=g(0)f(x)$. En donde $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, con $x = \frac{h}{R}$.

b) Reproduzca la siguiente tabla y complétela usando calculadora.

x	$f(x)$	$1-2x$	x	$f(x)$	$1-2x$
0.001			0.05		
0.003			0.07		
0.01			0.1		
0.03			0.5		

c) Ahora,

i) Verifique que para todo número real x, se satisface la igualdad

$$1 - (1+x)^2\,(1 - 2x) = x^2\,(3 + 2x).$$

ii) Use el resultado anterior para deducir una expresión de

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - (1-2x)$$

d) Ahora,

i) Muestre que para todo número real x perteneciente al intervalo $(0,5), \varphi(x) < 4x^2$.

ii) ¿Cómo es suficiente elegir x, tal que $\varphi(x) < 0.005$; $\varphi(x) < 0.01$?

iii) Deduzca que para h muy grande $g(0)\left[1 - 2\frac{h}{R}\right]$ constituye una buena aproximación de $g(h)$.

5. Se sabe que en el ecuador $g(0) = 9.78\ \mathrm{m/s^2}$, $R = 6380\ \mathrm{Km}$, sin utilizar la calculadora dé un valor aproximado de $g(h)$ a 10, después a 30 y a 100 Km por debajo del ecuador.

También se conoce que en el polo $g(0) = 9.83\mathrm{m/s^2}$, $\mathrm{R} = 6360\ \mathrm{Km}$. Encuentre los valores de $g(h)$ para los mismos valores de h dados anteriormente.

6. Sea D la recta de ecuación $y = 2x - 3$.

i) Si $M = (x,y)$ es un punto de la recta D, entonces pruebe que la distancia de M al origen está dada por la siguiente función:

$$d(x) = \sqrt{5x^2 - 12x + 9}$$

ii) Calcule $\mathrm{d}(0)$; $d(1)$; $d(1.2)$; $d(1.5)$ y $d(2)$.

iii) Trace la recta D y verifique los valores encontrados en (ii) sobre la gráfica.

El punto A de abscisa 1.2 es especial ¿por qué? Dé una prueba de lo anterior utilizando las ecuaciones de D y de la recta que va del origen al punto A.

7. Determine la representación del conjunto E en el plano cuyas coordenadas x y y satisfacen la expresión $|x+y| = |y|-x$.

8. Proporcione la representación del conjunto E en el plano cuyas coordenadas x y y verifican el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} 5x + 3y \geq 0 \\ \\ y - 2x < 2 \end{cases}$$

9. Se prevé un salón de clase para recibir a 40 alumnos y su profesor. Cada uno de ellos debe poder contar con 4 m^3 de aire. Por otro lado, la superficie de suelo disponible debe ser de 6 m2 para el profesor y 1 m^2 para cada alumno.

i) ¿Cuál deberá ser la superficie mínima del suelo?

ii) Si se elige dicha superficie mínima, ¿cuál debe ser la altura mínima del aula?

iii) Para que los ocupantes del aula tengan las mejores condiciones de trabajo, se ha decidido dar al salón un volumen de 180 m^3.

Exprese el área $A(x)$ del aula en función de su altura x. Teniendo en cuenta que el área no puede ser inferior a la calculada en i) y que la altura bajo el techo no puede ser inferior a 2.6 m, haga una representación gráfica de las variaciones del área en función de la altura.

iv) Determine gráficamente las área correspondientes a las alturas: 2.8, 3, 3.5, 3.8 y las alturas correspondientes a las áreas: 50, 55, 60 y 65.

10. ¿Qué punto sobre la parábola definida por la ecuación $y=x^2-4x+3$ es el más cercano al origen?

11. Para las personas que viajan regularmente en el sistema de transporte colectivo metro en la Ciudad de México, cierta empresa propone dos formas de pago:

Forma A: pagar cada viaje con tarifa completa, esto es $3.00 por viaje.

Forma B: comprar un abono a $40.00 y pagar cada viaje a media tarifa, esto es, $1.5.

Designemos por x el número de viajes, por $y_1(x)$ el costo de x viajes con la forma A, y por $y_2(x)$ el costo de x viajes según la forma B.

i) Reproduzca y complete la siguiente tabla:

x	5	11	17	22	30	35
$y_1(x)$						
$y_2(x)$						

ii) Exprese $y^1(x)$ y $y^2(x)$ en función de x y grafíquelas.

iii) Resuelva la desigualdad para deducir el número de viajes a partir del cual la forma B es más ventajosa que la forma A.

12. Trace el segmento CD de longitud 5 unidades. Señale sobre CD un punto M y construya un rectángulo CMKS, tal que MK $=2.5$; construya del otro lado de la recta CD el triángulo equilátero MDE.

i) La posición del punto M varía; llamémosla CM $= x$. ¿Cuáles son los valores posibles de x?

ii) Exprese, en función de x: el perímetro $p_1(x)$ del rectángulo CMKS y el perímetro $p_2(x)$ del triángulo MDE.

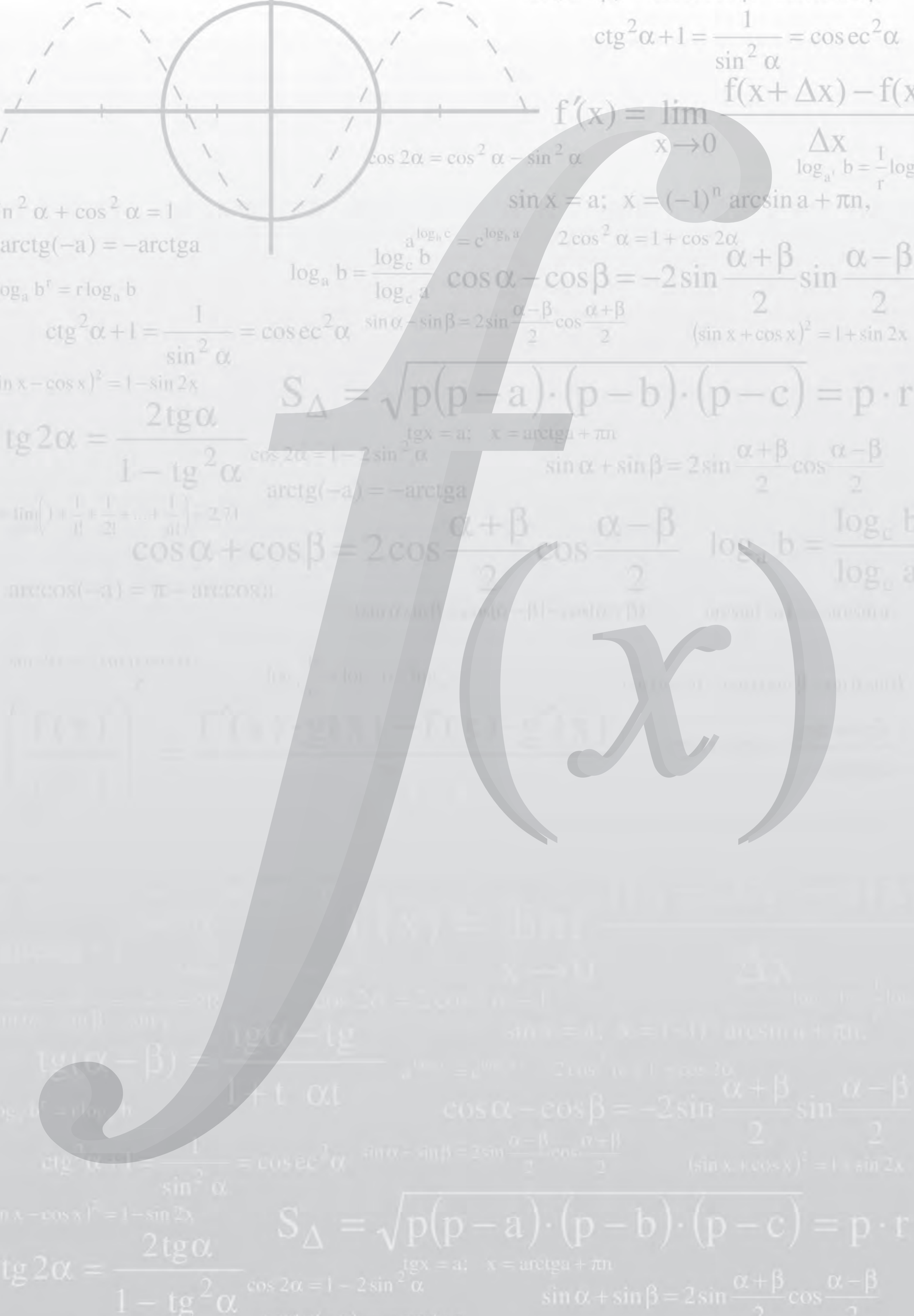
iii) Represente gráficamente las funciones $p_1(x)$ y $p_2(x)$.

iv) ¿Cómo podríamos determinar gráficamente el valor de x para el cual el perímetro del rectángulo CMKS es igual al perímetro del triángulo MDE?

13. Dos ciclistas hacen el mismo trayecto de 5 km; al primero le lleva 12 minutos hacerlo y al segundo 15 minutos.

i) ¿Cuál es la velocidad media (km/h) de cada ciclista durante este recorrido?

ii) Supongamos que los ciclistas parten en el mismo momento. Represente gráficamente el trayecto de los dos ciclistas: ¿cuántos metros separan a los dos ciclistas a un kilómetro de la meta? ¿Cuánto tiempo separa a los ciclistas a un kilómetro de la meta?


$\operatorname{ctg}^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\operatorname{cosec}^2\alpha$
$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$\sin x=a;\quad x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,$
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
$\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg}a$
$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$
$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$
$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\log_a b^r=r\log_a b$
$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
$(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x$
$(\sin x-\cos x)^2=1-\sin 2x$
$S_\Delta=\sqrt{p(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}=p\cdot r$
$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$
$\operatorname{tg}x=a;\quad x=\operatorname{arctg}a+\pi n$
$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$
$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\arccos(-a)=\pi-\arccos a$
$f(x)$

Semblanza de la Dra. Rosa María Farfán

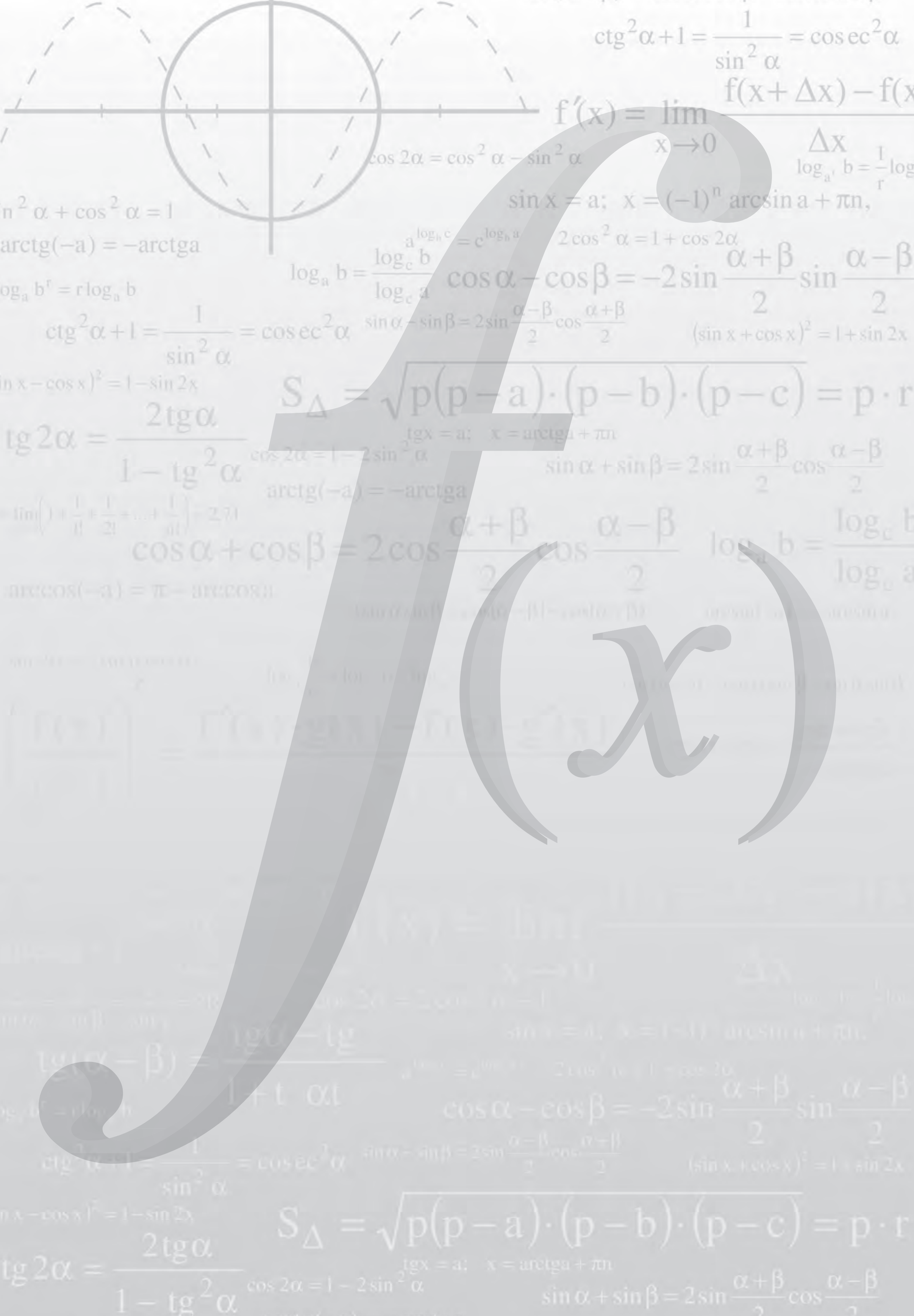
Durante su vida académica, la profesora Farfán ha logrado consolidar un liderazgo significativo en el campo de la Matemática Educativa, tanto por sus aportes teóricos como en el ámbito de la formación de grupos académicos consolidados y por supuesto, debido a su influencia en la educación contemporánea.

El más reciente de sus libros, publicado por la Editorial Gedisa, *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización*, sintetiza sus aportes al campo de la investigación sobre los procesos de **construcción social del conocimiento** matemático problematizando el saber matemático como parte esencial para el desarrollo tanto de la disciplina como de las intervenciones didácticas y ha sido la base para sus originales diseños hacia la educación de millones de niños y jóvenes en nuestro país y el extranjero. Con esta singular obra, la doctora Farfán ha abierto líneas de investigación para la Matemática Educativa en México, que le han permitido comunicar sus resultados tanto en la construcción social de conocimiento, como en temas nuevos que ella ha impulsado, como los **estudios de género** en matemáticas y ciencia y sobre **desarrollo de talento,** así como los avances en **profesionalización docente**. La cantidad, diversidad y calidad de citas son un ejemplo del impacto científico de su obra.

Derivado de los logros en la investigación, ha sido invitada a dirigir programas de gran trascendencia para la educación de las matemáticas de millones de niños y jóvenes mexicanos. La Subsecretaría de Educación Básica de la SEP le encomendó el diseño y escritura de las "Guías del maestro en matemáticas" para primaria y secundaria en las cuales diseñó instrumentos de intervención en el sistema educativo con base en resultados de investigación. Asimismo, por convenio entre Cinvestav y SEP, tuvo a su cargo la dirección de dos proyectos de gran impacto: el diseño y dirección de la Especialización para la profesionalización docente en matemáticas. *Estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*, con capacidad para atender a 10,560 profesores de matemáticas en servicio del nivel secundaria de todo el país; y otro sobre el diseño y dirección del *Primer seminario de profesionalización para profesores sobre* *experiencias de aprendizaje en el aula*, dirigido a los líderes en la Especialización mencionada.

La labor de la doctora Farfán en este periodo no se reduce a sus publicaciones o a los proyectos que ha dirigido o las conferencias a las que ha sido invitada (Japón, Dinamarca, Brasil, Argentina, España y México), sino que se extiende a la formación de nuevos maestros y doctores en Ciencias y a la consolidación de espacios comunitarios del más alto nivel académico. Además de ser investigadora titular en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, miembro del SNI y de la AMC, colaboró desde su creación con dos programas de Matemática Educativa que hoy pertenecen al PNPC, Maestría en la UAG y de educación en ambientes virtuales del Cicata – IPN.

Un logro significativo fue su labor como Directora fundadora de la revista *Relime*, que nace en 1997 y desde 2004 se incorporó en el Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica del Conacyt, y a partir de 2008, al ISI Web of Knowledge, contribuyendo así a romper un mito sobre la publicación científica de alta calidad desde Latinoamérica, pues se constituyó como la segunda revista de nuestra disciplina en el mundo, en ingresar a dicho índice.



BIBLIOGRAFÍA

Básica

ALANÍS, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., Garza, A., Rodríguez, R. (2008). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

CANTORAL, R. y Farfán, R. (2003). *Mathematics education: A vision of its evolution, Educational Studies in Mathematics*, Kluwer publishers, 53(3), 255–270.

CANTORAL, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon* 42, 14(3), 353–1369.

FARFÁN, R. Albert A. y Arrieta J. (2001). *Resolución gráfica de desigualdades*. México: Iberoamérica.

FARFÁN, R. (2012). *Sociepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización*. Barcelona, España: Gedisa.

FARFÁN, R. (1997). *Ingeniería didáctica. Un estudio de la variación y el cambio*. México: Iberoamérica.

Complementaria

ARTIGUE M. (1995). *Didactic Engineering, Recherches en Didactique des Mathématiques. Selected Papers*. Traducción en español. En P. Gómez (ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 33-59. México-Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

ARTIGUE M. (1998). L’évolution d’une problématique en didactique de l’analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(2), 231-261.

BROUSSEAU, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C.

PARRA y I. Saiz (Comps.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones* Argentina: Paidós (pp. 65-94).

BROUSSEAU, G. (1994). Problèmes et résultats de Didactique des

Mathématiques, ICMI Study 94.

BROUSSEAU, G. (1999). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. (Colección.: Psicología Cognitiva y Educación). Argentina: Aique.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1995). *Estudiar matemáticas, El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en didactique des mathématiques* 18(1), 7-34.

Jodelet, D. (1989). *Les représentations sociales*. París: P.U.F.

Lezama J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Martínez, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales*. Tesis de maestría no publicada. DME, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Mungny, G (1986). *Psychologie sociale du développement cognitive*. Berna: Peter Lang.

Ruiz, L. (2000). Ingeniería didáctica. *Construcción y análisis de situaciones de enseñanza- aprendizaje*. Material de apoyo, del curso: Construcción y análisis de situaciones de enseñanza- aprendizaje, impartido en RELME XIV. Panamá.

Software utilizado:

GeoGebra 4.2. Descarga gratuita del sitio:

http://www.geogebra.org/cms/es/

Guía de Referencia Rápida de GeoGebra 4.2. Traducción de Liliana Saidon. Instituto GeoGebra para la República Argentina. Recuperado el 1 de julio de 2013 de http://www.geogebra.org/help/geogebraquickstart_es.pdf

Se terminó de imprimir y encuadernar en diciembre de 2013
en Impresora y Encuadernadora Progreso, S. A. de C. V. (IEPSA),
Calzada San Lorenzo 244; C.P. 09830, México, D. F.
El tiraje fue de 10,000 ejemplares.

ISBN: 978-607-9362-04-1

SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS