DESARROLLO DEL PENSAMIENTO TRIGONOMÉTRICO

360°

GISELA MONTIEL ESPINOSA

SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO TRIGONOMÉTRICO

Gisela Montiel Espinosa

Investigadora del

Instituto Politécnico Nacional,

CICATA-Legaria

Ricardo Cantoral Uriza
Coordinador de la Serie

Primera edición, 2013

Subsecretaría de Educación Media Superior
Argentina # 28 Col. Centro Histórico, Del. Cuauhtémoc
México, Distrito Federal

ISBN: 978-607-9362-02-7

Impreso en México

CONTENIDO

PRÓLOGO

Estimada profesora, estimado profesor:

Como parte de una estrategia de largo plazo para la profesionalización docente en el campo de las matemáticas, el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) y la Subsecretaría de Educación Media Superior de la SEP, diseñaron un plan para elaborar estos materiales dirigidos a las y los profesores de Matemáticas del país. En un segundo momento, con la colaboración de la red de egresados de Matemática Educativa y el apoyo de la Sociedad Matemática Mexicana, llevaremos a cabo mesas, foros, seminarios, cursos y diplomados mediante un Plan Nacional para la Profesionalización Docente en las Matemáticas Escolares.

Quienes estamos interesados en el aprendizaje de las matemáticas no podemos reducir los conceptos a sus definiciones, ni limitar las experiencias didácticas a la repetición memorística de algoritmos y resultados. Aprender matemáticas no puede limitarse a la mera copia del exterior a través de resultados previamente elaborados, o digamos que, a su duplicado; sino más bien, es el resultado de construcciones sucesivas cuyo objetivo es garantizar el éxito ante una cierta situación de aprendizaje.

Una consecuencia educativa de este principio consiste en reconocer que tenemos todavía mucho que aprender al analizar los propios procesos de aprendizaje de nuestros alumnos; nos debe importar, por ejemplo, saber cómo los jóvenes del bachillerato operan con los números, cómo entienden la pendiente de una recta, cómo construyen y comparten significados relativos a la noción de función o proporcionalidad, o cómo se explican a sí mismos nociones de azar. Esta visión rompe con el esquema clásico de enseñanza según el cual, el maestro enseña y el alumno aprende. Estos textos se diseñaron para ayudar al docente a explorar y usarlos para una enseñanza renovada aprovechando las formas naturales en que los estudiantes razonan sobre matemáticas y sobre lo que aporta a este respecto la investigación en Matemática Educativa.

El papel del profesor en esta perspectiva es mucho más activo y propositivo, pues sobre él o ella recae más la responsabilidad del diseño y coordinación de las situaciones de aprendizaje. Actualmente se considera al profesor como un profesional reflexivo, que decide, diseña, aplica y experimenta estrategias de acción para lograr el aprendizaje de sus alumnos. De manera que aprender matemáticas no se reduce a recordar fórmulas, teoremas o definiciones para resolver problemas mediante la imitación de las explicaciones del profesor en clase o con apego a los métodos ilustrados en los textos escolares.

Los resultados de las pruebas nacionales de corte masivo, utilizadas con fines de investigación, permitirían saber cuáles conceptos y procesos requieren todavía adaptaciones progresivas con el fin de mejorar su aprendizaje. Si bien los últimos resultados de las pruebas de logro académico estandarizadas muestran un incremento en el porcentaje de la población estudiantil con resultados satisfactorios y un decremento en el complemento, aún falta mejorar la atención en algunas temáticas particulares.

Gracias a la labor que lleva a cabo el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, a través de sus profesores, egresados e investigadores en formación, sabemos cuáles asuntos, de naturaleza transversal, resultan fundamentales para el aprendizaje de las matemáticas y de las ciencias, como puede ser el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, la constitución de un lenguaje gráfico para las funciones, el desarrollo del pensamiento trigonométrico, el pensamiento proporcional y el pensamiento estadístico. Estos asuntos siguen siendo un reto de la mayor importancia para mejorar los aprendizajes entre los estudiantes del bachillerato mexicano.

Por esta razón, los cinco volúmenes de esta colección fueron pensados para el docente de matemáticas. Su lectura, análisis y discusión permitirá mejorar los procesos de aprendizaje matemático. Los títulos de los textos de la serie son los siguientes:

Vol. 1 - *Lenguaje gráfico de funciones. Elementos de precálculo*

- Rosa María Farfán Márquez

Vol. 2 - *Desarrollo del pensamiento trigonométrico*

- Gisela Montiel Espinosa

Vol. 3 - *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*
- Ricardo Cantoral Uriza

Vol. 4 - *La transversalidad de la proporcionalidad*

- Daniela Reyes Gasperini

Vol. 5 - *Elementos de estadística y su didáctica a nivel bachillerato*

- Ernesto Sánchez Sánchez

Según la profesora Régine Douady, *saber matemáticas* precisa de dos aspectos. Por un lado, se refiere a la disponibilidad funcional de nociones y teoremas matemáticos para enfrentar problemas e interpretar nuevas situaciones. En este proceso, dichas nociones y teoremas tienen un estatus de herramienta, en tanto que sirven para que alguien actúe sobre un problema en determinado contexto. Por otra parte, también significa identificar a las nociones y a los teoremas como parte de un cuerpo de conocimientos reconocidos socialmente. Es ahí donde se formulan definiciones, se establecen relaciones entre nociones mediante teoremas y se prueban las conjeturas adquiriendo entonces el estatus de objeto. Al adquirir ese estatus, están descontextualizados y despersonalizados para permitir su aprendizaje. Este proceso de descontextualización y despersonalización participa del proceso de apropiación del conocimiento. Por su parte, para un profesor enseñar se refiere a la creación de las condiciones que producirán la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes. Para éstos, aprender significa involucrarse en una actividad intelectual cuya consecuencia final sea la disponibilidad de un conocimiento con su doble estatus de herramienta y de objeto. Para que haya aprendizaje y enseñanza es necesario que el conocimiento sea un objeto importante, casi esencial, de la interacción entre el profesor y sus alumnos.

Ésta es pues la primera de una serie de iniciativas coordinadas para la mejora de la educación en el campo de las matemáticas del bachillerato. No me resta más que animarles a estudiar y discutir los materiales que ahora tienen en sus manos, el camino es largo, pero iremos juntos ...

Dr. Ricardo Cantoral Uriza

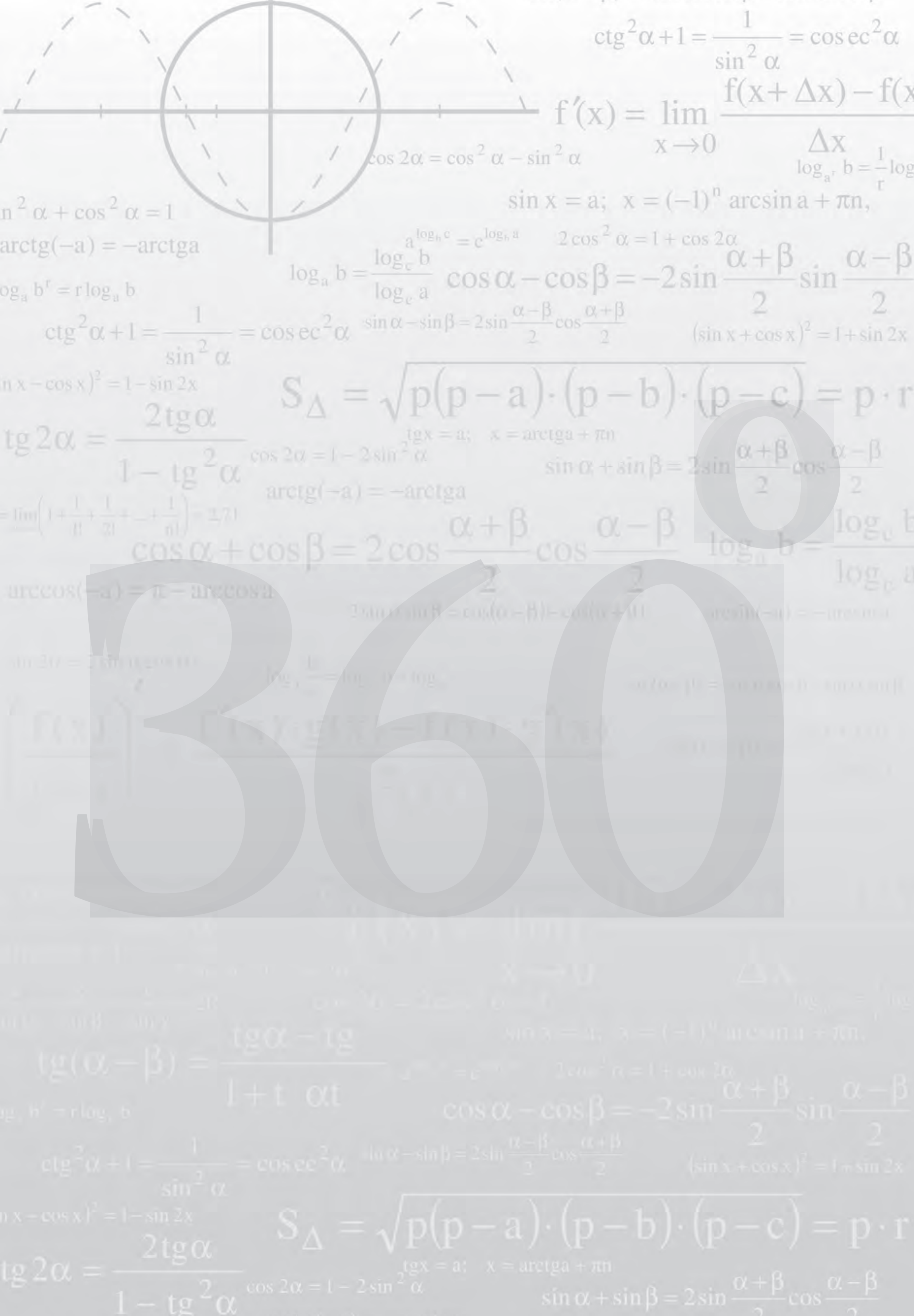
Jefe del Departamento

Matemática Educativa – Cinvestav

INTRODUCCIÓN

La Didáctica de la Trigonometría o Trigonometría Educativa, como llamaríamos en México por la tradición de llamar a nuestro campo disciplinar como Matemática Educativa, cuenta hoy con un número significativo de resultados de investigación y desarrollos de innovación didáctica que básicamente han problematizado sobre la enseñanza y aprendizaje de las razones trigonométricas, las funciones trigonométricas y el tránsito de las razones a las funciones, pocos estudios tratan directamente con el aprendizaje de objetos trigonométricos del tipo ecuaciones, identidades o leyes; pero parece estar implícito que un buen aprendizaje de las razones y las funciones favorecería un uso apropiado de esos otros objetos matemáticos.

Iniciaremos esta sección con una mirada a la enseñanza "oficial" de la trigonometría en el sistema educativo mexicano, para plantear desde ahí la problemática identificada y estudiada desde distintas perspectivas en la disciplina. El objetivo principal de este escrito será compartir con los lectores los resultados de la investigación e innovación educativa relacionadas con la trigonometría para problematizar en conjunto qué estamos enseñando y no sólo cómo lo estamos enseñando, de tal suerte que sin importar el enfoque que adopte nuestro sistema educativo contemos con elementos para innovar en nuestra práctica educativa desde la reorganización del saber matemático escolar mismo y no sólo desde la práctica pedagógica.


360°

1. TRIGONOMETRÍA ESCOLAR

En el sistema educativo mexicano el primer acercamiento del estudiante con la trigonometría se ubica en el tercer grado de la educación básica-secundaria (entre los 14 y 15 años de edad). Los programas y planes de estudio de este nivel están regulados centralmente por la Secretaría de Educación Pública, que establece qué es lo que los alumnos de este nivel deben saber sobre la razón trigonométrica (Cuadro 1).

Cuadro 1. Competencias, aprendizajes esperados y estándares curriculares donde se enmarca la trigonometría de la educación secundaria (SEP, 2011).

Tercer Grado. Bloque IV • Competencias que se favorecen: Resolver problemas de manera autónoma, Comunicar información matemática, Validar procedimientos y resultados, Manejar técnicas eficientemente. • Aprendizajes esperados: Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. Eje “Forma, Espacio y Medida”: • Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente. • Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo. • Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Este bloque está ubicado en la segunda mitad del ciclo escolar, es decir, casi al final de la educación básica-secundaria y encontrará vinculación directa con contenidos del nivel medio superior, ubicados según el subsistema educativo.

Aun adscritos al Sistema Nacional de Bachillerato es posible encontrar variaciones en las propuestas didácticas de los subsistemas de nivel medio superior de nuestro país; sin embargo, en lo que respecta a la matemática escolar, hay una invariante en ellas y en aquellas de los subsistemas no adscritos. La matemática escolar del nivel medio superior contempla tópicos del álgebra y la geometría como antecedentes al precálculo y/o al cálculo, así como elementos de la probabilidad y la estadístuca. En este marco general se plantea el tránsito de la trigonometría clásica, vinculada al estudio de los triángulos rectángulos en la educación básica-secundaria; a la trigonometría analítica, orientada al estudio de las funciones trigonométricas. Es decir, aquí se pasa de medir ángulos en grados a medirlos en radianes; se abordan las leyes de senos y cosenos, así como las identidades trigonométricas; se comienza a trabajar con ángulos negativos y mayores a 360°; se introduce el círculo unitario, para graficar las funciones en el plano cartesiano, etc.

A manera de ejemplo, presentamos en el cuadro 2 los momentos escolares donde la Dirección General de Bachillerato (DGB) ubica la enseñanza de contenidos trigonométricos, así como las competencias disciplinares que les asocia, aunque cabe señalar que éstas también se asocian a otros bloques temáticos.

Cuadro 2. Bloques y competencias disciplinares del Programa de Matemáticas II y IV de la DGB, relacionados con Trigonometría

Bloques en el Programa de Matemáticas II:

- Bloque VI: Describes las relaciones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos. En el Bloque VI identificarás diferentes sistemas de medida de ángulos describirás las razones trigonométricas para ángulos agudos. Finalmente, aplicarás las razones trigonométricas en ejercicios teórico-prácticos.
- Bloque VII: Aplicas funciones trigonométricas. En el Bloque VII interpretarás y aplicarás las funciones trigonométricas en el plano cartesiano, así como en el círculo unitario.
- Bloque VIII: Aplicas las leyes de senos y cosenos. En el Bloque VIII aplicarás las leyes de los senos y cosenos.

Competencias disciplinares:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

2. Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemáticos y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.
5. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que los rodean.

Bloque en el Programa de Matemáticas IV:

- VIII: Aplicas funciones periódicas. En este bloque se estudian las funciones exponenciales, logarítmicas y periódicas.

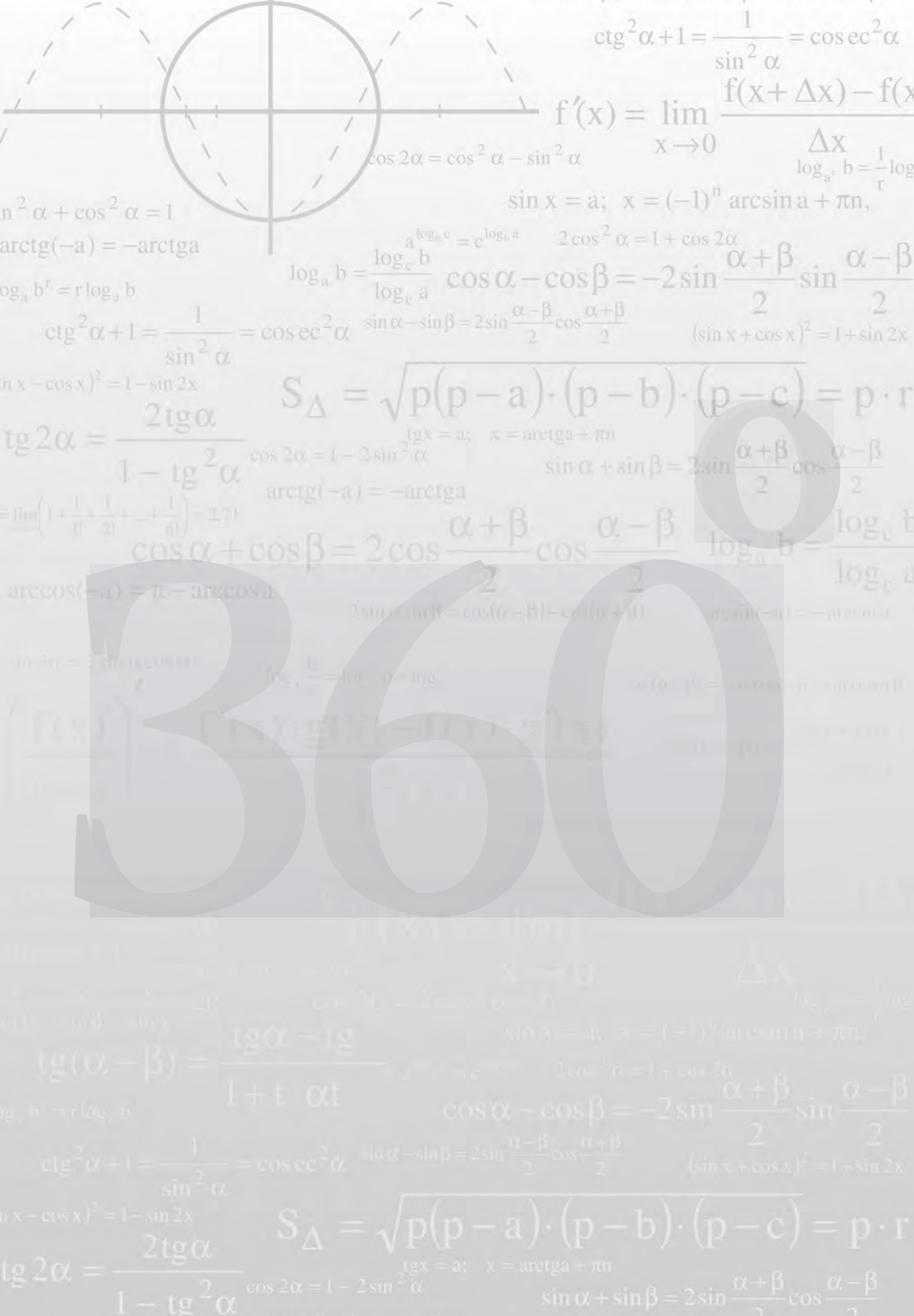
Competencias disciplinares:

6. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
7. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

El bloque VIII del programa de Matemáticas IV declara el desarrollo de las siete competencias del cuadro, la competencia 6 está presente en el programa de Matemáticas II, pero no se asocia a los bloques de contenido trigonométrico, lo cual puede resultar confuso, ya que las funciones periódicas abordadas son las que denomina como trigonométricas y circulares, abordadas también en el programa de Matemáticas II.

Por la ubicación curricular de los contenidos hay una separación de casi un año entre los bloques del programa de Matemáticas II y el bloque de Matemáticas IV, lo que se explica por la relación del contenido con la geometría y con las funciones, respectivamente.

Evidentemente el aprendizaje no estará asociado sólo al contenido que proponen los programas institucionales, sino a cómo es abordado en el aula, principalmente a las actividades didácticas que realiza el propio estudiante. Sin embargo, los resultados de investigación apuntan a cuestionar los contenidos, su ubicación curricular y los procesos de enseñanza asociados, por ello presentamos a continuación una síntesis de las aportaciones teóricas y didácticas que pueden ayudar tanto a investigadores como a profesores a entender, en un sentido amplio, los fenómenos didácticos relacionados con la trigonometría escolar y reconocer elementos de innovación susceptibles de llevar al aula.


360°

2. INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA

A fin de entender cuáles son los aprendizajes que logran los alumnos, se estudia cómo los métodos de enseñanza permiten alcanzar o no cierta comprensión. Por ejemplo, después de identificar las dificultades, concepciones o niveles de comprensión entre los estudiantes, algunas investigaciones cierran con una discusión sobre la pertinencia de utilizar los métodos del "triángulo rectángulo" y del "círculo unitario" con la intención de introducir las razones trigonométricas (Kendal y Stacey, 1998), o bien, utilizar al círculo trigonométrico como medio para pasar de las razones a las funciones trigonométricas (De Kee, Mura y Dionne, 1996).

De Kee, *et al*. (1996) realizan una investigación orientada al estudio del entendimiento de los estudiantes y concluyen que para favorecerlo hay que dar más importancia a los lazos entre las diversas representaciones de las nociones, aunque dichos lazos puedan parecernos evidentes y triviales cuando ya se posee el concepto. En esta investigación las autoras resaltan las siguientes concepciones que los estudiantes manifiestan acerca del seno y el coseno:

- considerarlas como un procedimiento que consiste en dividir una entre otra las longitudes de dos lados de un triángulo (rectángulo) y que produce el seno o el coseno de un ángulo (agudo)[1],
- lo que se le aplica al punto cuyas coordenadas están en el círculo trigonométrico;
- funciones de una calculadora; son funciones que proporcionaban, según los alumnos, el seno y el coseno de un número que expresaba la medida de un ángulo[2].

[1] Las autoras reportaron que en ocasiones los alumnos aplicaron ese procedimiento indebidamente a triángulos que no eran rectángulos o a ángulos que no eran agudos.

[2] Esta idea se expresó a pesar de que los alumnos no tenían acceso a una calculadora durante las entrevistas, continuamente hicieron referencia a ella como un medio privilegiado para encontrar el valor de un seno o de un coseno.

- curvas con aspecto ondulado característico como las gráficas de las funciones seno y coseno[3].

"Función" es el conjunto de diferentes objetos que comúnmente llamamos funciones ("la función trigonométrica es el conjunto, el coseno, el seno, todas esas cosas".

Además, las autoras encontraron que el alumno no hace diferencia entre el seno (coseno) como una *razón* trigonométrica y el seno (coseno) como *función* trigonométrica. En esta investigación se encontraron pocas huellas de comprensión, del género que fuera, de la función circular y de su papel en la definición de las funciones trigonométricas. De hecho, ellas cuestionan significativamente el papel de este método en la enseñanza:

> Si pensamos que la función circular no es más que un medio didáctico destinado a volver más visual, más "concreta", la construcción de las funciones trigonométricas, esta constatación deja perplejo. Hay que reconocer que esta aproximación concretiza la definición de las funciones trigonométricas al precio de complicarla considerablemente. (p. 25)

En este sentido, Grabovskij y Kotel'Nikov (1971) señalan como dificultad el que la enseñanza de la función trigonométrica (de argumentos numéricos) en el bachillerato recurra a ideas geométricas para que el estudiante la entienda, y no a métodos analíticos.

Ante esto proponen la modelación de fenómenos físicos como medio para permitir el reconocimiento del *origen conceptual* de la cantidad trigonométrica y las propiedades que guarda la función. Sin embargo, la forma en la que se calcula el valor numérico de la función trigonométrica, aun contextualizada, se establece de manera explícita como razón proporcional entre dos medidas y se calcula a través de su cociente. Es decir, en el fondo subyace (y depende de) la misma "técnica" de cálculo que en el triángulo rectángulo.

Por su parte, Weber (2005) encuentra resultados positivos al trabajar con el círculo unitario. Su investigación incluye un diseño didáctico fundamentado en teorías del aprendizaje matemático y en el estudio del entendimiento que muestran los estudiantes sobre la función trigonométrica. El autor propone la enseñanza de la función trigonométrica como *procepto*[4] , y reporta haber logrado

---

[3] Incluso algunos alumnos admitían que dichas curvas seguían representando las mismas funciones cuando sufrían una rotación o un cambio de escala.

[4] Entendiendo al procepto como la amalgama entre un proceso que produce un objeto matemático y un símbolo que se usa para representar tanto al proceso como al objeto (Gray y Tall, 1994, citado en Weber, 2005).

que los estudiantes de nivel universitario mostraran habilidad para aproximarse a los valores de expresiones trigonométricas básicas, determinaran propiedades de las funciones trigonométricas y justificaran por qué tienen dichas propiedades. Las actividades diseñadas en este estudio utilizan el método del círculo unitario como "procedimiento geométrico" para calcular los valores de las funciones trigonométricas; el valor se obtiene localizando la coordenada en el plano donde se intersecta el círculo con la línea que traza el ángulo en cuestión (figura 1). Producto de esta instrucción se reconoce que entender el *proceso* usado para crear la representación del círculo unitario para las funciones trigonométricas parece ser una parte integral del entendimiento de estas funciones.

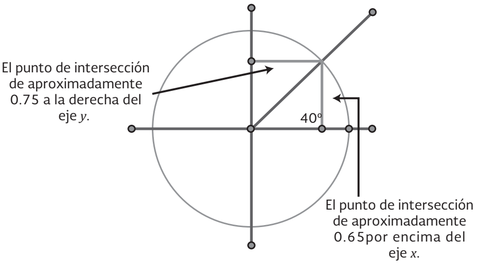


Figura 1. Proceso geométrico para el cálculo de valores para el seno y el coseno.
Fuente: Weber (2008)

Weber (2008) afirma que:

> para entender una operación trigonométrica como función, los estudiantes necesitan conocer un proceso que puedan usar para evaluar dicha función para cualquier ángulo dado, y deben ser capaces de anticipar aproximadamente el resultado de este método y razonar sobre las propiedades del resultado sin llevar a cabo los pasos del proceso (p. 145).

Sin embargo, lo que subyace al valor numérico de la coordenada que localiza el estudiante es, de nuevo, el valor que resulta de dividir dos longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

En la coexistencia de ambos métodos, el del triángulo rectángulo para introducir a la trigonometría y el del círculo unitario para transitar de la razón a la función trigonométrica, también se han reportado dificultades del estudiante. Maldonado (2005) diseñó un cuestionario con base en los contenidos institucionales de tres sistemas educativos mexicanos para explorar las concepciones de los estudiantes alrededor de la función trigonométrica. Su diseño dibuja tres etapas escolares: el planteamiento de la razón trigonométrica, la relación entre ángulos medidos en grados y radianes, y la comprensión de las propiedades. En la experiencia, los estudiantes no mostraron una concepción de *funcionalidad* de los conceptos trigonométricos, es decir, se conservan la razón trigonométrica y sus unidades de medida como el instrumento de resolución de todo aquello que se relacione con el seno, el coseno, la tangente y sus recíprocas, aunque se trate ya de una *función*. Maldonado identificó en la relación (equivalencia) del radián y el real, el punto neural para construir y entender la noción funcional de las relaciones trigonométricas y concluye que al no hacerse explícita en el discurso matemático escolar, al estudiante le es indistinto el tratamiento como razón o como función (ver figura 2).

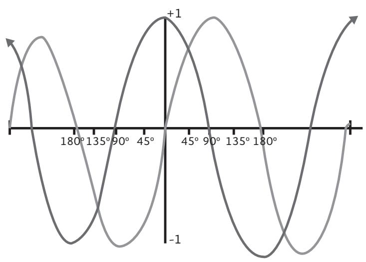


Figura 2. Una respuesta a la pregunta: ¿para qué valores de x se satisface sen x = cos x ? Argumenta tu respuesta graficando sen x y cos x .
Fuente: Maldonado (2005).

Tanto las dificultades como los desempeños positivos, producto de innovaciones didácticas, están fuertemente vinculados al uso de herramientas y nociones matemáticas relacionadas con las razones o las funciones trigonométricas, por ejemplo el uso de grados o radiantes para su argumento, de la semejanza y la proporcionalidad en el caso de las razones o de la variación para las funciones, su representación visual en el triángulo o en el plano cartesiano, entre otras.

Una mirada alternativa para separar estas nociones y ubicarlas cada una con una “técnica de enseñanza”, propone un uso integral de ellas para favorecer un *entendimiento trigonométrico coherente* (Moore, 2012). Para ello, Moore (2012, 2010; Moore, LaForest, Kim, 2012) diseña actividades didácticas, en el contexto del círculo, que van desde la medición angular hasta la graficación de las funciones trigonométricas y que favorecen el razonamiento cuantitativo[5], el uso del radio del círculo como unidad de medida y el razonamiento covariacional. Es decir, no propone un diseño didáctico para aprender el concepto de función trigonométrica, sino una serie de tareas que le dan coherencia al uso de múltiples nociones matemáticas relacionadas con ella. Si bien consideramos acertado el uso del contexto del círculo para la actividad trigonométrica, identificamos que para concretar las actividades en la gráfica de la función el estudiante requiere previamente de la definición de razón trigonométrica.

Problematizando la trigonometría

Además de reconocer los logros y las dificultades en el estudiante y asociarlos con el cómo enseñamos e inferir cómo se aprende, desde la investigación nos hemos ocupado por entender su porqué. Desde el enfoque teórico de la Socioepistemología, lo hacemos cuestionando también el qué enseñamos, es decir, problematizando a la propia matemática en juego y desde ahí hemos logrado una explicación más amplia de por qué ciertas dificultades o por qué el éxito de algunas innovaciones didácticas, independientemente del enfoque pedagógico que subyace a la práctica educativa. Partimos del principio de reconocer la naturaleza de cada saber matemático en juego y para el caso del conocimiento trigonométrico iniciamos nuestros estudios en su escenario histórico de origen. Identificar el desarrollo y la evolución de las nociones trigonométricas en relación con las circunstancias histórico-sociales donde se sitúan, nos da un marco para entender por qué la coherencia que propone Moore es efectivamente una vía para integrar nociones matemáticas y por qué el estudiante usa elementos geométricos para trabajar las funciones trigonométricas.

Es así que Montiel (2011) propone una construcción basada en prácticas y no sólo en conceptos, poniendo énfasis a la construcción de la relación y la funcionalidad trigonométricas y sus respectivos desarrollos del pensamiento geométrico-proporcional y analítico-funcional; en contraste con la visión tradicional sobre el aprendizaje de la razón y la función. En el cuadro 3 sintetizamos los elementos de la epistemología de prácticas que fundamenta el uso y la significación de las herramientas trigonométricas para una construcción articulada de las razones y las funciones trigonométricas.

---

[5] Entendido como la forma en que se razona sobre las cantidades (por ejemplo, los atributos medibles de los objetos) y las relaciones entre ellas (por ejemplo, la comparación multiplicativa entre dos cantidades).

Cuadro 3. Principios para la construcción de las relaciones trigonométricas (columna de la PS-Anticipación) y de la funcionalidad trigonométrica (columna de la PS-Predicción) en un escenario histórico.

	PRÁCTICA SOCIAL	
	Anticipación	Predicción
Práctica de Referencia	Matematización de la Astronomía	Matematización de la Física
Contexto	Estático-proporcional	Dinámico-periódico
Lenguaje	Geométrico-numérico	Curvas-ecuaciones
Racionalidad	Helenística-euclidiana	Física-matemática
Herramienta	Razón trigonométrica	Función trigonométrica
Variables	$\operatorname{sen}\theta$ (longitud) ϕ ángulo (en grados)	$\operatorname{sen}x$ (distancia) x tiempo (radián-real)
Escala de tiempo	Finita	Infinitesimal-infinito

- **Momento de anticipación**

  En el primer periodo histórico se identifica a la *anticipación* como la *práctica social* que regula las *actividades* asociadas a la *matematización de la astronomía*. Ya sea para la predicción o la explicación de fenómenos celestes, era necesario que éste sucediera para estar en condiciones de comprobar el dato y, a la vez, el modelo; la matematización, numérica o geométrica, orientaba las decisiones prácticas de la agricultura, el comercio o la navegación, del mismo modo que guiaba las explicaciones teóricas de la astronomía o la geografía. Esto es, se tenía la "necesidad" de *anticipación* al fenómeno. Este acto anticipatorio preconfigura la emergencia de un conocimiento y, en consecuencia, de un saber institucional.

  La trigonometría se constituye como un *preliminar matemático* de la teoría astronómica, que en virtud del dominio de la racionalidad helenística debía desarrollarse en el marco epistemológico que brindaba la geometría deductiva. La construcción de "modelos a escala" de una entidad real no manipulable (la inmensidad celeste) constituye una transición de lo *macro* a lo *micro*, donde la proporcionalidad entre ellos (realidad presente y realidad representada) condiciona la precisión del modelo. De manera natural, las *razones* se convierten en la abstracción inmediata de la *proporción* y los círculos, los arcos/ángulos y las cuerdas en los elementos constitutivos del modelo geométrico.

El conocimiento trigonométrico que se construye en este *momento de anticipación*, al estar vinculado a la matematización de la astronomía, está considerando una escala de *tiempo finito*, humana y cosmológica a la vez, cuyo periodo depende en definitiva del fenómeno específico en cuestión (día-noche, fases lunares, estaciones del año, eclipses, posición de un cuerpo celeste). Así, encontramos que la periodicidad y el valor de las cuerdas (valores acotados) estaban vinculados a la repetición de fenómenos astronómicos y a la posición de los cuerpos celestes, respectivamente, y una vez que eran encontrados periodo y posición, no había razón alguna para su estudio en tanto propiedad de la relación trigonométrica.

- **Momento de predicción**

  Para desarrollar nuevas herramientas trigonométricas fue necesaria una concepción matematizable del movimiento, es decir, concebir cualidad y movimiento en términos de entes abstractos (figuras y números). Del siglo XVI al siglo XVII se da una emergencia conjunta de los conceptos físicos y los conceptos matemáticos, donde autores como De Gandt (1999) reconocen al estudio del movimiento y de las velocidades como lo que introduce a los problemas y descubrimientos del cálculo infinitesimal.

  En el desarrollo de la teoría newtoniana se puede reconocer el contexto *dinámico* con que se tratan tanto los fenómenos como los objetos matemáticos. Newton integra en una sola teoría las primeras leyes matemáticas que describen el movimiento celeste de Kepler, con las leyes del movimiento terrestre elaboradas por Galileo (Cantoral y Farfán, 2004), partiendo de una interpretación de los objetos geométricos como entidades generadas por un movimiento continuo, pero que no podía ser reducido a una geometría del movimiento y que se fundaba sobre un tratamiento de las ecuaciones algebraicas que prefiguraban de algún modo la noción analítica de la función (Panza, 2001). Una figura geométrica se concibe entonces como una especie de mecanismo donde el movimiento se transmite de acuerdo con las articulaciones de la figura; las líneas y las superficies vienen engendradas, en sentido propio, por desplazamientos (De Gandt, 1999).

La *predicción*, entendida como la necesidad de conocer un estado futuro con base en el presente y las variaciones de su pasado, se reconoce como la práctica social que regula las actividades asociadas a esta *matematización de la física*, y el paso del fenómeno celeste al modelo mecánico constituye una vía de transición de lo geométrico al plano *funcional*. El *método* de los infinitesimales hace de la serie infinita la expresión matemática para representar la relación entre dos cantidades variables, sus cambios y sus variaciones. En este sentido, la cantidad trigonométrica se despojará de su carácter geométrico-estático cuando pase de ser la medida de una línea en el círculo a una cantidad cuya *ley de variación* describa un movimiento particular.

La cantidad trigonométrica, reconocida como trascendente, adquiere el estatus de función analítica al aplicarle los métodos del análisis infinitesimal. Los infinitos le permiten a Euler poner al descubierto la estructura interna de las funciones (Durán, 2009), que para el caso del seno y el coseno la constituye sus propiedades periódica y acotada. En este sentido, se dan cambios importantes como trasladar el foco de atención del tiempo (o periodo) al movimiento, de lo periódico del tiempo a lo periódico del movimiento, pero siempre referido al comportamiento del objeto en cuestión. Este movimiento se caracteriza por lo que tienen en común la cuerda vibrante, las ondas de sonido que produce la campana, las ondulaciones del agua y los flujos (o corrientes) marinas; lo que actualmente denominamos movimiento de un oscilador armónico. Una vez que lo trigonométrico adquiere el estatus de función, son sus propiedades lo que la convertirán en una herramienta poderosa en el análisis matemático. El uso de lo trigonométrico se ampliaría en la resolución de problemas físico-matemáticos específicos, pero en un momento en donde la matemática se perfila hacia la racionalidad del rigor lógico.

Con esta epistemología de prácticas no se pretende una reproducción de lo sucedido en la historia (una génesis ficticia, como se le conoce en la disciplina), sino una reconstrucción de condiciones tales como el contexto, el lenguaje, la racionalidad y, principalmente, el manejo adecuado de las escalas de tiempo; reconociendo que las actividades estarán matizadas por el escenario, el planteamiento de situaciones-problema y los participantes (edad, conocimientos previos, tradición escolar, etc.).

Esta epistemología nos ha permitido explicar las dificultades del estudiante al reconocer que la introducción a la trigonometría a través del estudio del triángulo rectángulo despoja a las razones trigonométricas de todo aquello que le da origen, sentido y significado; es decir, *hay una pérdida del proceso geométrico en la construcción de lo trigonométrico.* El discurso Trigonométrico Escolar (dTE) ha convertido a las razones trigonométricas en el proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados del triángulo, esto es, en una técnica para encontrar valores faltantes de un triángulo. En ese sentido, entendemos que los resultados positivos de Moore se deben en gran medida a devolverle a lo trigonométrico esas condiciones que le son propias.

En la investigación de Jácome (2011), profesores mexicanos del nivel medio superior, en un contexto de actualización docente, llevaron a cabo una experiencia didáctica cuya intención fue trabajar relaciones de proporcionalidad en la construcción de modelos geométricos para resolver una situación-problema tradicional de “cálculo de distancias inaccesibles”. El diseño de la situación-problema pone énfasis en la toma de medidas angulares y en la construcción de modelos geométricos a escala, a través de la experiencia y la manipulación. Es decir, no se les proporcionó una ilustración con medidas hipotéticas, sino que se les pidió localizar un objetivo (alto) en su entorno para calcular su altura.

En los reportes entregados por los profesores se pueden observar distintos fenómenos, algunos entendibles por tratarse de profesores del nivel medio superior. Por ejemplo, quienes utilizan la razón trigonométrica tangente (RTT) como herramienta para resolver el problema hablan de función trigonométrica, función tangente, procedimiento trigonométrico, relación tangente, razones trigonométricas o, simplemente, fórmula tangente. En el nivel medio superior se trabaja con mucho más énfasis en las funciones trigonométricas, así que la ambigüedad entre razón (también vista como fórmula o procedimiento) y función es bastante frecuente.

Sin embargo, entre estos profesores se presentó un hecho (ver figura 3) que no se había atendido en la investigación sobre estos tópicos y que resultó de nuestro interés porque pone en evidencia la necesidad de un rediseño del discurso matemático escolar que se sustente en la problematización de lo que estamos enseñando y no sólo de cómo lo estamos enseñando.

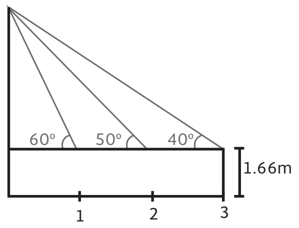


Figura 3. Ejemplo de significado lineal en la relación ángulo-distancia (cateto).

Los pasos que sigue el profesor para calcular la altura de un objetivo alto, tomando medidas a 1, 2 y 3 metros de distancia, son básicamente los de la tradición escolar. Sin embargo, la representación gráfica nos muestra que la costumbre didáctica de enfatizar la relación proporcional entre los lados del triángulo rectángulo pudiera sugerir también una relación lineal entre el ángulo y el cateto adyacente, cuando éste, para el caso de la experiencia, incrementa su medida en forma constante.

Partimos de asumir que la razón trigonométrica, como herramienta, si bien resuelve el problema de calcular la altura del edificio (cumpliendo así con el objetivo escolar de elegir correctamente la razón trigonométrica tangente y calcular el valor faltante), no asegura un pensamiento trigonométrico ante el manejo del triángulo, sus elementos y las relaciones entre éstos. Por ello, no centramos nuestra atención en el manejo del objeto matemático (la razón trigonométrica), sino en la práctica que demanda de modelar una realidad *macro no manipulable*, cuantificando la *inclinación* mediante el uso de ángulos, midiendo *distancias* y trazando *proyecciones* al construir triángulos, así como de la construcción de modelos geométricos haciendo uso de la semejanza y las herramientas que se requieran para representar la situación vivida con el objetivo de estudiarla.

Con base en lo anterior no podemos declarar que el profesor no domina los conceptos o tiene concepciones erróneas, sino que hay significados de lo trigonométrico que subyacen a su quehacer: significado *lineal*, significado como *división de longitudes*, significado como *técnica para obtener un valor*; porque subyacen también a la trigonometría escolar y, en consecuencia, a todo aquello que la transmite con intencionalidad didáctica.

Con el objetivo de enfrentar estos fenómenos, ya sea para evitarlos o ayudar al estudiante a superarlos, y al mismo tiempo buscar dar respuesta a la demanda institucional de atender al aprendizaje de las razones trigonométricas se han diseñado actividades didácticas que incorporan algunos resultados de la investigación, como la que presentamos a continuación. Proponemos su resolución y posterior análisis para identificar cómo se reorienta la actividad didáctica para poner énfasis en el uso de más herramientas y nociones geométricas, en la manipulación de objetos matemáticos, en la modelación de lo macro con lo micro, en la medición, en el reconocimiento de regularidades y relaciones, pero sobre todo en la interacción del estudiante con su entorno haciendo matemáticas.

Calculando alturas

Para realizar esta actividad necesitas salir de tu salón. El grupo debe elegir un objetivo alto (edificio, poste o un árbol) para calcular su altura aproximada y deben formar equipos de mínimo tres integrantes.

Cada equipo requiere de los siguientes materiales:

- Una cinta métrica.
- Un popote.
- Una regla.
- Un transportador.
- Tijeras.
- Lápiz.
- Hojas de trabajo.

Actividad 1.
Localiza el objetivo

En equipos de tres elijan el un objeto para que un equipo se posicione a dos metros del objetivo (árbol, poste o edificio), otro a cuatro metros y el último a cinco metros. En cada equipo un integrante, usando el popote como telescopio, localice su punto más alto (ver figura A). Otro integrante se encargará de tomar las medidas y el tercero de registrarlas.

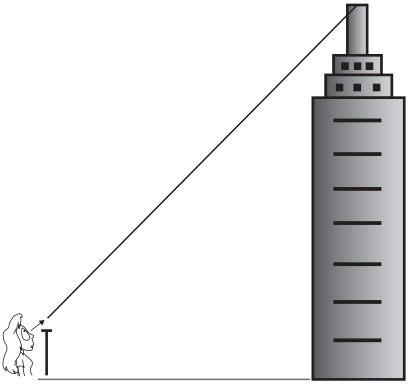


Figura A.

Actividad 2. A medir

Primero se debe tomar la medida aproximada del ángulo de inclinación que tiene el popote, tal como mostramos en las figuras B1 y B2 Es importante que al medir el ángulo consideren los siguientes casos (dependiendo desde dónde estén haciendo sus observaciones):

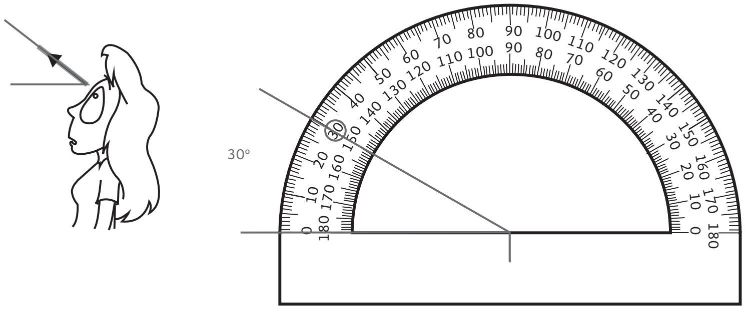


Figura B1. Midiendo el ángulo en el sentido de las manecillas del reloj (de izquierda a derecha)

Enseguida debe tomarse la medida del piso al punto más bajo donde se posiciona el popote (figura 3).

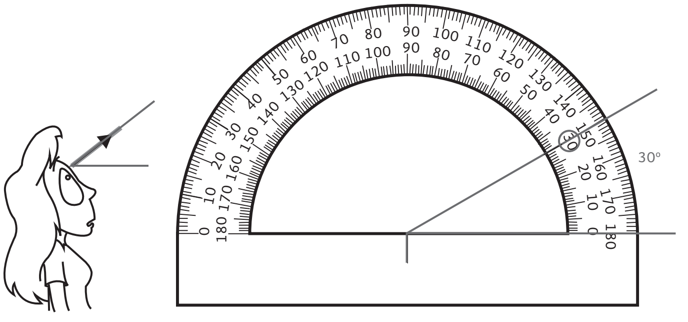


Figura B2. Midiendo el ángulo en sentido opuesto a las manecillas del reloj (de derecha a izquierda).

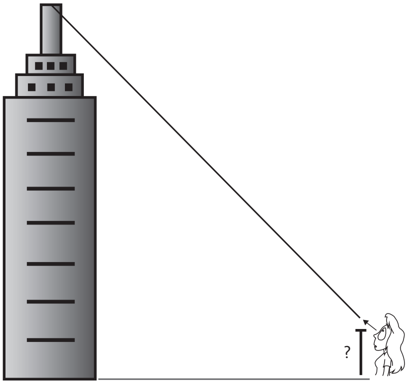
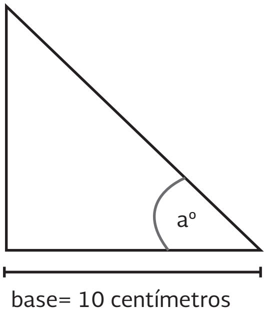


Figura C.

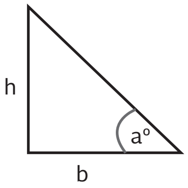
Actividad 3. Construyendo un modelo geométrico

¡Ya puedes volver a tu salón!

Con la medida obtenida del ángulo de elevación construyan tres triángulos rectángulos con bases $b = 5$, $b = 10$ y $b = 15$ centímetros, como se muestra en la siguiente figura.



¿Cuánto mide la altura de cada triángulo? Recórtalos y completa la siguiente tabla con las medidas que has encontrado.



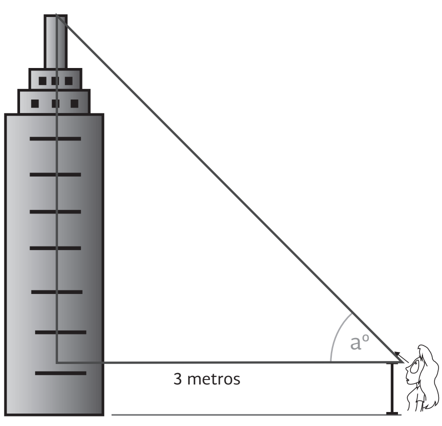
Triángulo	Base (b)	Altura (h)
1	5 cm	
2	10 cm	
3	15 cm	

Actividad 4. Regresando a la situación inicial

Los triángulos que construiste son semejantes, por lo tanto, sus lados guardan una relación proporcional:

Relación proporcional	Coloca los valores de tus triángulos
$\frac{base\ del\ triángulo\ 1}{altura\ del\ triángulo\ 1} = \frac{base\ del\ triángulo\ 2}{altura\ del\ triángulo\ 2}$ "la base del triángulo 1 es a su altura, como la base del triángulo 2 es a la suya"	$\frac{5}{\square} = \frac{10}{\square}$
$\frac{base\ del\ triángulo\ 1}{altura\ del\ triángulo\ 1} = \frac{base\ del\ triángulo\ 3}{altura\ del\ triángulo\ 3}$ "la base del triángulo 1 es a su altura, como la base del triángulo 3 es a la suya"	$\frac{5}{\square} = \frac{15}{\square}$
$\frac{base\ del\ triángulo\ 2}{altura\ del\ triángulo\ 2} = \frac{base\ del\ triángulo\ 3}{altura\ del\ triángulo\ 3}$ "la base del triángulo 2 es a su altura, como la base del triángulo 3 es a la suya".	$\frac{10}{\square} = \frac{15}{\square}$

Teniendo las razones proporcionales de las medidas, puedes usar la regla de tres para encontrar alguna medida que haga falta. Observa el siguiente esquema de la situación inicial.

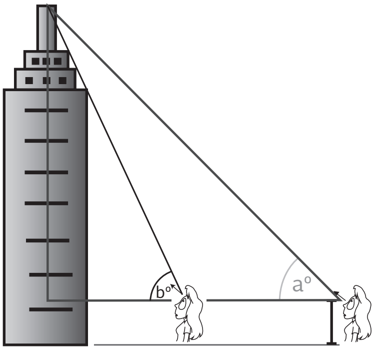


El triángulo superpuesto a la imagen también sería *semejante* a los que construiste, así que puedes calcular una parte de la altura aproximada del objetivo utilizando la regla de tres y las medidas de alguno de los triángulos construidos. ¡No olvides que la base del triángulo superpuesto está en metros y los triángulos que tú construiste están en centímetros!

Si al resultado le sumas la medida que ya calculaste del piso al punto más bajo donde se posicionó el popote, obtendrás aproximadamente la medida total de tu objetivo, ¿cuál es?

Actividad 5. Veamos las regularidades

A partir de la medida angular que obtuviste construimos triángulos rectángulos semejantes que nos sirvieron como herramientas para aproximarnos a la medida de tu objetivo. Otros equipos calcularon la medida del mismo objetivo que tu equipo, pero a una distancia distinta de él y obtuvieron otro ángulo.



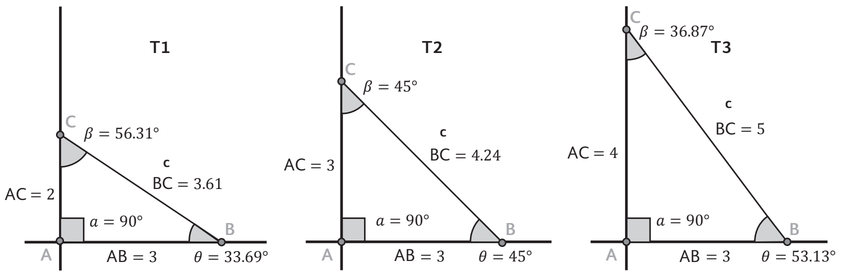
El nuevo triángulo que se observa cambió el tamaño de su base, la medida del ángulo señalado y su hipotenusa, pero no cambia su altura. Si hablamos del problema inicial, esto suena lógico, porque no importa desde dónde veamos el objetivo, su tamaño siempre es el mismo.

Completa la tabla con los datos de los otros equipos:

Distancia al objetivo	Ángulo de inclinación
2 metros	
4 metros	
5 metros	

Actividad 6. Modificando medidas en los triángulos

Los triángulos que hemos usado en las actividades anteriores son todos triángulos rectángulos. Al cambiar la longitud de uno de los catetos del triángulo rectángulo cambian también las medidas de dos de sus ángulos y la longitud de la hipotenusa, mira los ejemplos:



Completa la tabla con los valores que le correspondan a cada triángulo:

Triángulo	Medida del ángulo θ	Longitud del cateto AC	Longitud del cateto AB	Longitud de la hipotenusa BC
T1				
T2				
T3				

Si el punto B representara tu posición frente al objeto que mediste en la actividad y θ el ángulo que inclinas el popote para dirigirlo a tu objetivo (posición del punto C), entonces a mayor inclinación más alto tu objetivo a medir.

¿Podrías calcular la longitud de AC para un ángulo $\theta = 40°$ sin construir un triángulo?

☐ Sí ¿Cómo? ____________________

☐ No ¿Por qué? ____________________

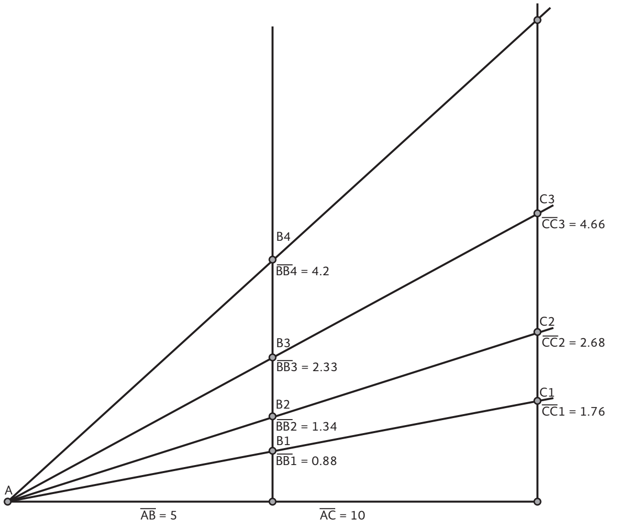
¿Podrías calcular la medida del ángulo θ si la longitud de AC es igual a 5?

☐ Sí ¿Cómo?

☐ No ¿Por qué?

Actividad 7. ¿Cómo se relacionan ángulo y cateto?

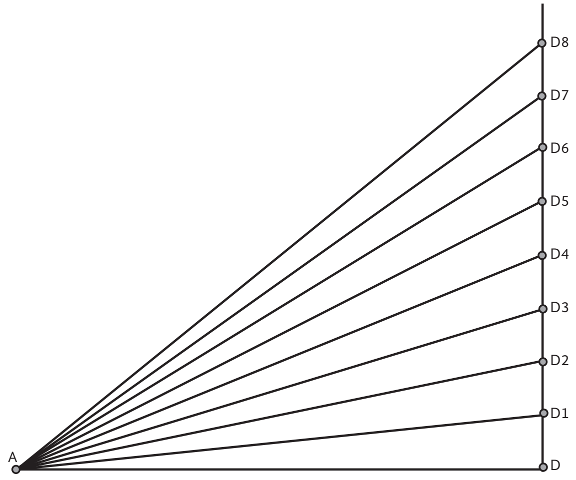
En la siguiente figura, tomando de referencia la línea horizontal, se han trazado varios segmentos a distinta inclinación, que se intersectan con las líneas verticales que pasan por los puntos B y C (y que son perpendiculares a la línea horizontal), las intersecciones como proyecciones de los ángulos. Observa cómo a mayor inclinación del segmento hay un incremento en la longitud de la proyección.



Completa la tabla con las longitudes de las proyecciones y el ángulo de inclinación del segmento que las producen.

Ángulo α	Longitud de la proyección en la línea que pasa por B	Longitud de la proyección en la línea que pasa por C
	$\overline{BB1}$=	$\overline{CC1}$=
	$\overline{BB2}$=	$\overline{CC2}$=
	$\overline{BB3}$=	$\overline{CC3}$=
	$\overline{BB4}$=	$\overline{CC4}$=

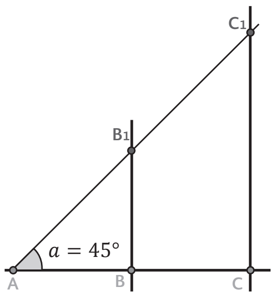
De nuevo tienes proyecciones, sobre la vertical, incrementando en longitud. Completa la tabla con las longitudes de las proyecciones y del ángulo de inclinación de los segmentos que las producen.



Completa la tabla con las medidas del ángulo y las longitudes de las proyecciones.

Ángulo α	Longitud de la proyección en la línea que pasa por D	Ángulo α	Longitud de la proyección en la línea que pasa por D
	$\overline{DD1}=$		$\overline{DD5}=$
	$\overline{DD2}=$		$\overline{DD6}=$
	$\overline{DD3}=$		$\overline{DD7}=$
	$\overline{DD4}=$		$\overline{DD8}=$

Actividad 8. Encontrando regularidades



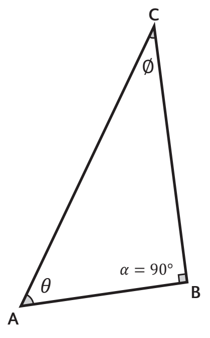
Observemos que las proyecciones sobre las líneas verticales, trazadas con el mismo segmento a 45° tienen diferentes longitudes. Esto se debe a que también se relacionan con otra longitud, ¿puedes ver cuál?

Considera que ABB_1 y ACC_1 son triángulos rectángulos semejantes. La relación ángulo-cateto o ángulo-hipotenusa, de cada triángulo, no guarda una relación conocida hasta ahora (proporcional, lineal o cuadrática, por ejemplo); pero la relación cateto-cateto o cateto-hipotenusa, entre los triángulos sí. Así que vamos a encontrar regularidades entre todos los elementos del triángulo.

Relación proporcional	Coloca los valores numéricos
$\dfrac{\text{longitud del cateto } BB_1}{\text{longitud de la hipotenusa } AB_1} = \dfrac{\text{longitud del cateto } CC_1}{\text{longitud de la hipotenusa } AC_1}$	
$\dfrac{\text{longitud del cateto } AB_1}{\text{longitud de la hipotenusa } AB_1} = \dfrac{\text{longitud del cateto } AC}{\text{longitud de la hipotenusa } AC_1}$	
$\dfrac{\text{longitud del cateto } BB_1}{\text{longitud del cateto } AB_1} = \dfrac{\text{longitud del cateto } CC_1}{\text{longitud del cateto } AC}$	

Estas proporciones las encontraremos para cualquier proyección del mismo ángulo y van a recibir el nombre de razones trigonométricas.

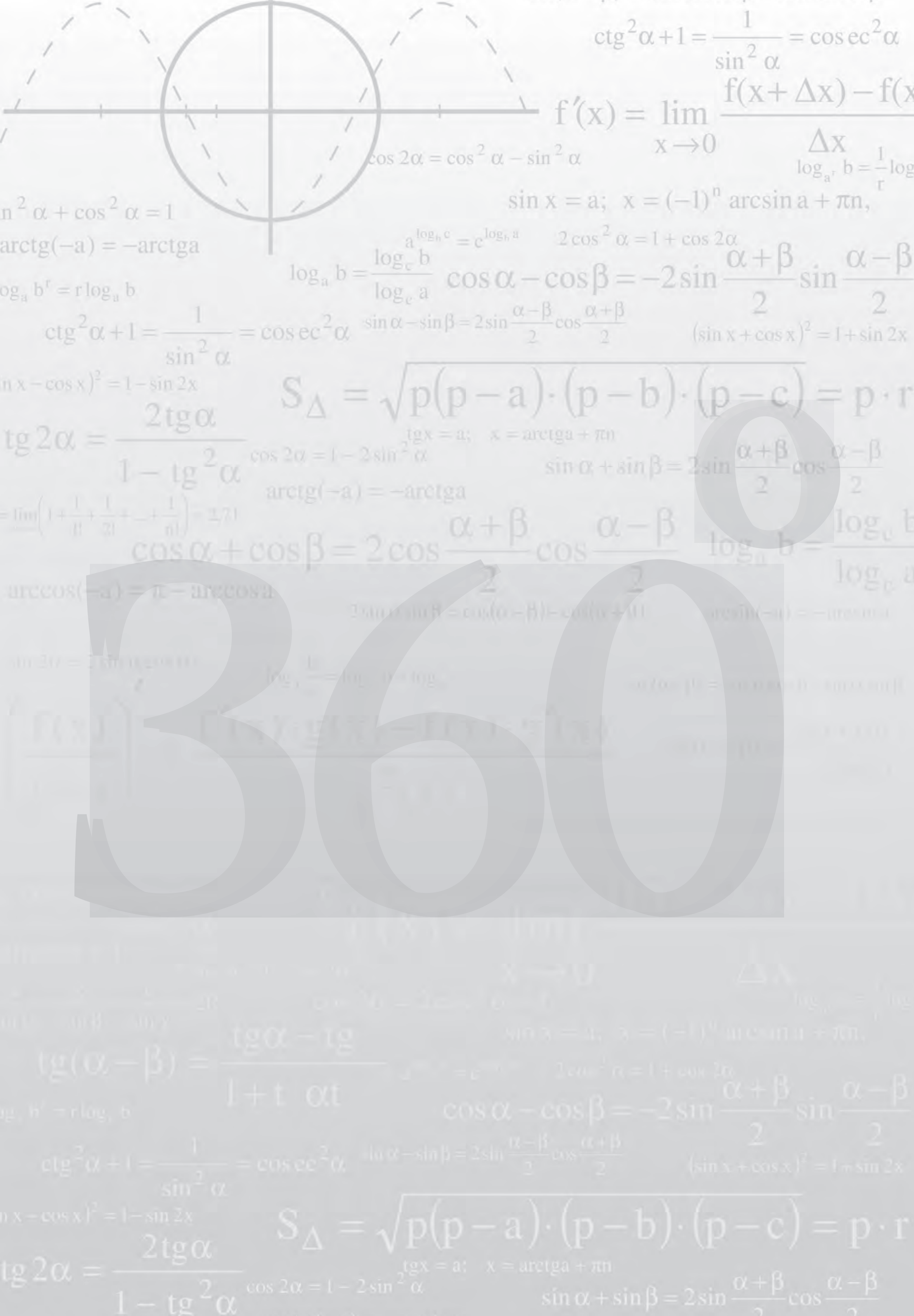
Completa la siguiente tabla con los datos que hacen falta.

<table>
<tr><th>Razón trigonométrica</th><th>Triángulo rectángulo</th><th></th><th></th></tr>
<tr><td>$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$</td><td rowspan="6">
</td><td>$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$</td><td>$\operatorname{sen}\emptyset = \underline{\qquad}$</td></tr>
<tr><td>$\cos\theta = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$</td><td>$\cos\theta = \underline{\qquad}$</td><td>$\cos\emptyset = \underline{\qquad}$</td></tr>
<tr><td>$\tan\theta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$</td><td>$\tan\theta = \underline{\qquad}$</td><td>$\tan\emptyset = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$</td></tr>
<tr><td>$\csc\theta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$</td><td>$\csc\theta = \underline{\qquad}$</td><td>$\csc\emptyset = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$</td></tr>
<tr><td>$\sec\theta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$</td><td>$\sec\theta = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$</td><td>$\sec\emptyset = \underline{\qquad}$</td></tr>
<tr><td>$\cot\theta = \dfrac{\text{cateto adyancente}}{\text{cateto opuesto}}$</td><td>$\cot\emptyset = \underline{\qquad}$</td><td>$\cot\emptyset = \underline{\qquad}$</td></tr>
</table>

Como se puede apreciar en el diseño y en cualquier libro para el nivel básico-secundaria, la introducción a la trigonometría se contextualiza en la geometría y ésta por tradición escolar hace uso de los ángulos medidos en grados. En este sentido, explicamos el uso de elementos geométricos en el trabajo con las funciones trigonométricas, que reporta Maldonado (2005), no por falta del dominio analítico en los estudiantes, sino porque es el triángulo donde ellos calculan "la cantidad trigonométrica" y los ángulos, como elemento constitutivo del triángulo, siempre se mide en grados. Sin embargo, en esta tradición escolar el uso de los triángulos tiene un carácter puramente ilustrativo, no son construcciones geométricas en el sentido estricto y ello puede provocar que lo trigonométrico se vea sólo como la relación entre ángulos y catetos, y no se estudie la naturaleza de esta relación, que es en donde radica lo trigonométrico. Éste es un punto de rediseño que, desde la socioepistemología, reconocemos fundamental en la trigonometría y se manifiesta en actividades de construcción geométrica y análisis de la naturaleza de la relación entre ángulo y catetos del triángulo rectángulo.

El tratamiento de las funciones trigonométricas, en el nivel medio superior se basa en una extensión de las razones insertando el triángulo rectángulo en el círculo unitario, gracias al cual se establece el dominio de la función en todos los reales, el significado de un ángulo negativo, la conversión de la unidad de medida: grados $\longleftrightarrow$ radianes, la equivalencia entre radianes y reales, la periodicidad y el acotamiento de la función para el caso del seno y coseno. Es decir, el círculo se introduce ya que se han aprendido las razones trigonométricas y no como el escenario natural donde emergen.

Un discurso trigonométrico escolar basado en la epistemología de prácticas propuesta por Montiel (2011) centraría la actividad del estudiante en construcciones geométricas a partir de las cuales se reconozca lo trigonométrico en la relación ángulo-cuerda y en cómo las razones trigonométricas son la herramienta para cuantificar dicha relación; de tal suerte que el círculo no sería una estrategia didáctica para pasar de las razones a las funciones, sino el contexto en donde se realizan las construcciones geométricas y que da significado, uso y sentido al triángulo rectángulo. La evolución de la razón trigonométrica a las funciones trigonométricas dependería de la evolución de las situaciones-problema y no de un cambio conveniente de lenguaje y herramientas matemáticas.


360°

3. IMPLICACIONES DIDÁCTICAS DE UN REDISEÑO DEL DTE

Antes de abordar elementos de rediseño e innovación es importante reconocer que la medición angular es una actividad fundamental para construir lo trigonométrico y resulta una de las más complejas, no sólo porque es de naturaleza distinta a la medición de longitudes por ejemplo, sino porque el ángulo es un concepto escolar mutifacético al que se le asocian diversos significados, según la tarea matemática en donde se le sitúe. Rotaeche (2008; Rotaeche y Montiel, 2011) identificó que si bien usar el concepto de ángulo resulta una tarea compleja, los estudiantes son capaces de usar y cuantificar la angularidad, por ejemplo, usando fracciones para hablar de partes de vuelta. Es decir, es necesario reconocer el uso de la angularidad que harán los estudiantes en las actividades trigonométricas para identificar si cuentan con los antecedentes para no tener dificultades con la medición.

Con el objetivo de articular los distintos resultados de investigación e innovación con la epistemología de prácticas antes discutida, vamos a desarrollar una secuencia de actividades "prototípicas" que no constituyen un diseño para implementarse en cualquier escenario escolar, sino que conforman la base de prácticas a partir de la cual se pueden elaborar diseños de clase que se adapten a las condiciones institucionales particulares de quien las poga en marcha.

Fase 1. Planteamiento y exploración de un problema

Cambiando las condiciones del problema que propone Vohns (2006), planteamos:

> André y Carlo están en distintos lugares del parque, pero a la misma distancia de la campana donde inicia la ciclopista (4 km). ¿Cuál es la distancia entre ellos?
>
> Forma equipos de 3 integrantes y discutan:
>
> - Las diferentes posiciones en las que pueden estar André y Carlo (apóyense con dibujos para ejemplificar estas posiciones)

¿Qué posiciones permiten obtener la distancia con cálculos aritméticos y por qué?

Y se espera que se propongan dibujos que puedan representar hasta cuatro casos:

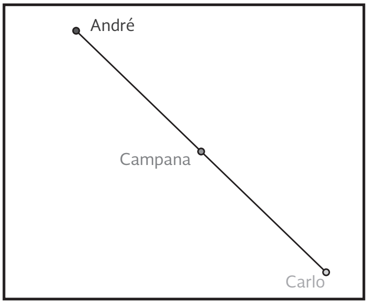


Figura 4. Caso 1.

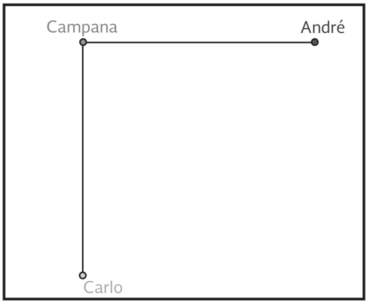


Figura 5. Caso 2.

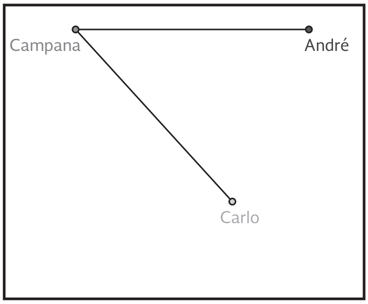


Figura 6. Caso 3.

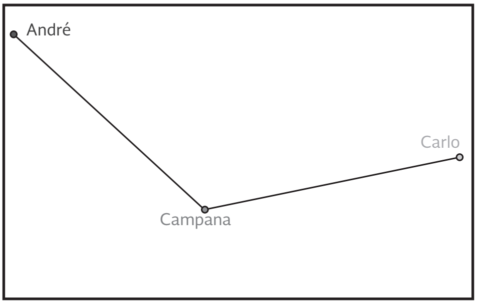


Figura 7. Caso 4.

Los casos en donde se puede obtener la distancia con cálculos aritméticos son cuando André y Carlo están en extremos opuestos (figura 4), y cuando entre ellos y la campana se forma un triángulo rectángulo (figura 5). Probablemente en el primer caso no exista necesidad de introducir al ángulo como argumento; sin embargo, para el segundo caso sí lo es o no podría calcularse la distancia con el teorema de Pitágoras. Es decir, es este caso el que nos ayuda a introducir el dato necesario para calcular la distancia en cualquier otro caso; de ahí que pueda hablarse del caso genérico cuando el ángulo formado entre André, Carlo y la campana sea menor a 90° (figura 6) o el caso genérico cuando el ángulo sea mayor (figura 7).

Fase 2. Un contexto para las construcciones geométricas

Para hablar de cualquier caso es necesario variar las posiciones de André y Carlo. Por ejemplo, con la ayuda de un programa computacional de geometría dinámica se puede mostrar que un círculo representaría todas las posiciones posibles para ambos activando el 'rastro de una de las posiciones' (Figura 8).

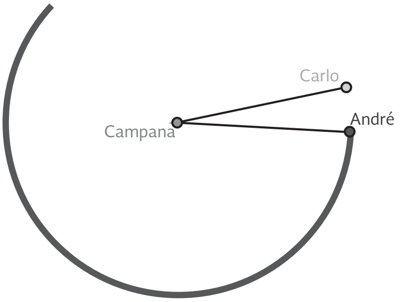


Figura 8.

Evidentemente el programa puede dar el valor de la distancia entre los dos puntos, lo que Vohns (2006) llamaría acercamiento numérico-empírico al problema; pero no dice cómo se obtiene dicha medida. Lo importante en esta exploración de posiciones es identificar de qué depende esta distancia y las propiedades que guardan los triángulos que se forman cuando se varían las posiciones de André y Carlo. Por ejemplo, en la siguiente figura observamos distintas posiciones de André y Carlo, en donde hay la misma distancia entre ellos porque el ángulo que forman con la campana es el mismo (figuras 9 y 10).

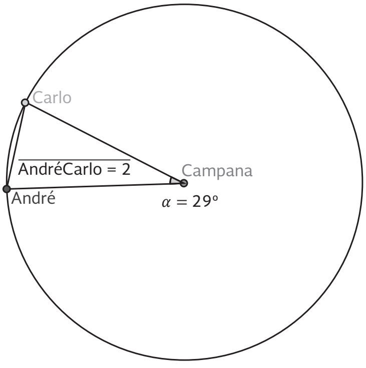


Figura 9.

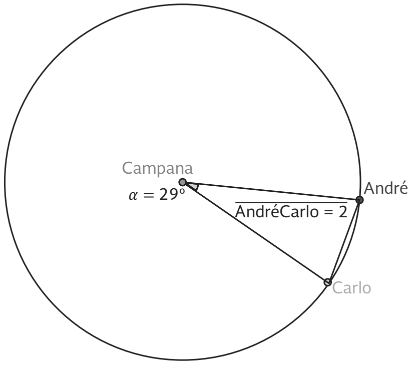


Figura 10.

Ésta resulta también una actividad propicia para reflexionar sobre la distancia entre André y Carlo (o la cuerda que se forma en el círculo) cuando el ángulo que forman con la campana, en el programa de geometría dinámica, es mayor a 180º la distancia (figura 11).

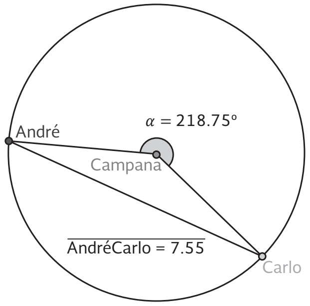


Figura 11.

En este acercamiento numérico-empírico es importante que se identifique que no sólo hay una relación entre el ángulo y la distancia entre ellos (la cuerda), sino cómo es esta relación (razonamiento cuantitativo en el sentido que propone Moore); por ejemplo, analizando casos en los que el ángulo se duplique (figura 13) y triplique (Figura 14), y la distancia entre André y Carlo no sea el doble (figura 13) y el triple (figura 14), respectivamente.

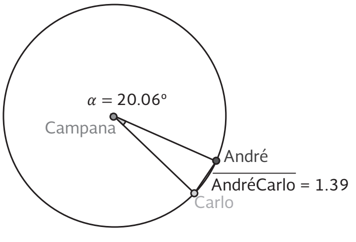


Figura 12

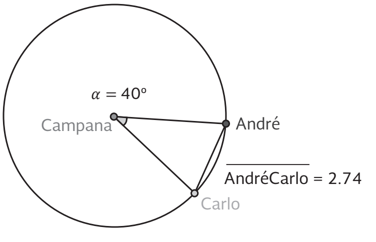


Figura 13

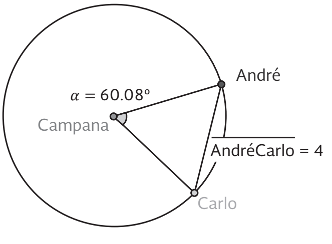


Figura 14

A partir de esta actividad se plantea entonces la necesidad de una herramienta matemática para calcular la medida de la cuerda para cualquier ángulo. Para hacerlo dejamos de lado, momentáneamente, la variación de los ángulos; es decir, centramos el cálculo en una posición y vamos incorporando herramientas geométricas para estudiar el caso.

La primera herramienta consiste en el trazo de un círculo más pequeño con centro en la campana (figura 15), para comenzar un análisis de semejanza entre los triángulos que se van a formar (figura 16), haciendo incluso más círculos (figura 17) para analizar más casos.

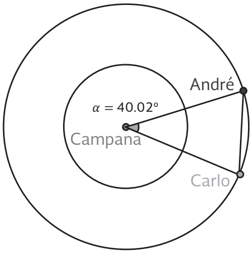


Figura 15.

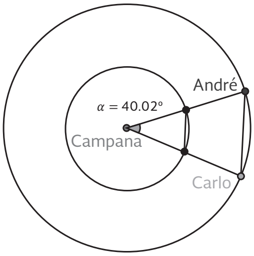


Figura 16.

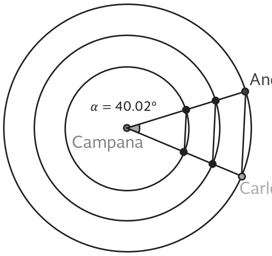


Figura 17.

Para definir las razones trigonométricas como tal se requerirá de introducir otra herramienta geométrica, la bisectriz del ángulo, y ello nos llevará a estudiar, ahora sí, el triángulo rectángulo y una nueva medida (que en la construcción geométrica es la altura de los triángulos isósceles que se forman). La razón trigonométrica, aun definida por el profesor, se introduce a partir de las construcciones geométricas para resolver un problema haciendo uso de las razones y proporciones como un lenguaje para explicar la relación de los lados de los triángulos respecto de un mismo ángulo.

Fase 3. Hacia la construcción de la función trigonométrica

Para continuar la actividad hacia la construcción de la función trigonométrica se puede tomar la ruta de Weber (2005, 2008) si ampliamos el problema hacia la localización de las posiciones de André y Carlo en puntos específicos de un plano (se puede usar como referente un mapa regional) sin embargo, la distancia entre ellos dejaría de ser el centro de atención del problema. La inserción del plano cartesiano con centro en la posición de la campana y la búsqueda por una coordenada específica redirige la atención hacia los triángulos rectángulos que se forman y tienen su base en el eje horizontal (figuras 18 a la 20).

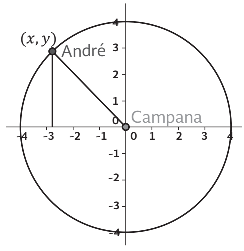


Figura 18

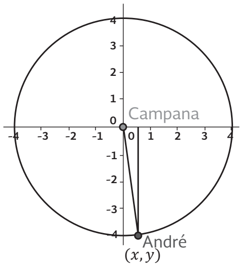


Figura 19

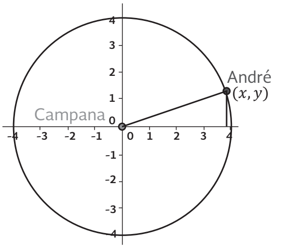


Figura 20

Otra ruta es el planteamiento de Moore (2012) para construir la gráfica de la función. Para ello es necesario que se adopte el radio como medida angular, tal como plantea Moore y que logra proponiendo actividades del tipo “Dado un ángulo central de 35º, determina la longitud de los arcos que corta en las circunferencias de radio 2cm, 2.4 cm y 2.9 cm”. Otra posibilidad es trabajar desde el inicio con ángulos en términos de $\frac{1}{2\pi}$, aunque escolarmente domina la tradición de las construcciones geométricas usando los ángulos en grados.

Una adaptación al problema que propone Moore (2012) para construir la gráfica de la función es:

Una rueda de la fortuna, de 11 metros de radio, tarda 1.2 minutos para dar la vuelta completa. Cuando alguien toma su asiento se encuentra en la parte inferior, diremos que hay una distancia de 0 metros al suelo, y va girando en el sentido contrario a las manecillas del reloj en forma continua por 12 minutos. Bosqueja la gráfica que relaciona el total de la distancia recorrida por Isela en un paseo, con la distancia vertical que hay entre ella y el suelo durante el trayecto.

El objetivo de esta actividad no es sólo lograr la gráfica sino el conjunto de ideas, apoyos geométricos, mediciones, razonamientos numéricos, tablas y operaciones que se realizan para llegar a la gráfica. Una vez construida la gráfica es necesario variar las condiciones del problema para obtener variaciones en la gráfica y a partir de estas variaciones desarrollar lo que hemos denominado como *funcionalidad-trigonométrica*.

Fase 4. Resignificando la función trigonométrica

La funcionalidad-trigonométrica es un planteamiento sobre la construcción social de la función trigonométrica desarrollado desde el enfoque teórico de la Socioepistemología (Buendía y Montiel, 2011; Montiel y Buendía, en prensa), es decir, es una explicación sobre la construcción de los significados que le dan uso y sentido a esta función al seno de la actividad humana organizada en prácticas y normada por prácticas sociales. Se establece, particularmente para las funciones seno y coseno, que el estudiante construye la funcionalidad-trigonométrica cuando:

i. Estudia lo trigonométrico desde un acercamiento variacional al movimiento oscilatorio, en donde se reconozca que el comportamiento trigonométrico se caracteriza, y se distingue de otros comportamientos (algebraicos o trascendentes) por su variación y sus variaciones sucesivas, esto es, por cómo cambia y cómo cambian sus cambios;
ii. Identifica una unidad mínima de análisis del comportamiento, que le permite predecir. Al trabajar con objetos periódicos, lo que favorece la predicción es una distinción entre el "se repite" y el "cómo se repite";
iii. Reconoce lo acotado del comportamiento en el análisis de los datos respecto de las condiciones de la situación que le da origen;
iv. Hace uso de la unidad de medida adecuada a la experiencia física y la reconoce en la representación gráfica de los datos obtenidos de la situación que le da origen.

Montiel y Buendía (en prensa) diseñan una situación-problema cuyas actividades están intencionalmente orientadas a la construcción de la funcionalidad-trigonométrica, en ella proponen la organización de un escenario de estudio de la variación y el cambio, con un enfoque hacia el uso y la resignificación de lo periódico, de lo acotado, del comportamiento de las variaciones y de la unidad de medida. Esto lo logran a través de la experimentación y estudio del movimiento de un péndulo simple y las gráficas que resultan de tomar las distancias entre éste y un sensor de movimiento.

Beltrán (2013) y Santos (2013) llevan al aula el diseño para estudiar a profundidad el rol de la modelación y el uso de gráficas, respectivamente, en la construcción de la funcionalidad-trigonométrica. Ambas autoras, profesoras en servicio, adaptaron el diseño a sus entornos escolares y proporcionaron evidencia de cómo trabajar sólo en los contextos numérico y gráfico lleva a los estudiantes a poner en funcionamiento una gama amplia de argumentaciones a partir de su actividad.

Junto con las evidencias encontradas en la investigación de Jácome (2011) hemos elaborado una caracterización del pensamiento trigonométrico no como algo que debe alcanzarse (por eso no hablamos de definirlo), sino como el conjunto de evidencias que hemos recolectado en el estudio de la actividad matemática cuando estudiantes y profesores enfrentan situaciones donde el conocimiento trigonométrico emerge o debe emerger para resolver un problema particular. En ese sentido, es necesario caracterizar este tipo de pensamiento a la luz de la situación-problema y la herramienta matemática que se pone en funcionamiento.

Hablamos entonces del *desarrollo de un pensamiento funcional-trigonométrico* cuando el estudiante reconoce, en un *comportamiento* periódico-acotado, una herramienta predictiva. La especificidad de este comportamiento periódico se construye en un contexto de variación, y se distingue de otros cuando se reconoce en sus cambios y sus variaciones sucesivas el mismo tipo de comportamiento (trigonométrico, acotado y periódico). Ello no resta importancia a las construcciones geométricas, por el contrario constituyen el proceso que les da origen y hablaríamos del *desarrollo del pensamiento relacional-trigonométrico* cuando el estudiante identifica la relación entre ángulos y cuerdas, pero sobre todo la naturaleza de dicha relación y la posibilidad de cuantificarla vía las razones proporcionales.

Presentamos a continuación el diseño de la situación problema de Montiel y Buendía, con las adaptaciones que propone Beltrán (2013) para controlar la toma de datos. Invitamos a la resolución de las actividades, registrando todos sus procedimientos, respuestas e ideas para mejorar el diseño, y a partir de ello reflexionar sobre los elementos que componen la funcionalidad-trigonométrica.

Estudiando el movimiento del péndulo

Actividad 1

Utilizando una calculadora de capacidad gráfica y un sensor de movimiento se recolectaron las distancias que hay entre el sensor y un cuerpo en movimiento. En nuestro experimento, este cuerpo es una bola de madera colgada de una cinta de 40 centímetros y su posición en reposo se muestra en la figura A.

El sensor de movimiento se encargará de medir la distancia entre él y la bola, para mandar los datos a la calculadora. Hemos configurado la calculadora para que el sensor tome las distancias cada segundo, durante 15 segundos.

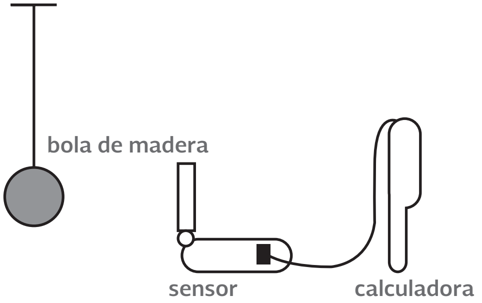


Figura A. Bola en reposo.

Al no moverse la bola, el sensor toma las distancias; en la calculadora se obtiene la gráfica siguiente.

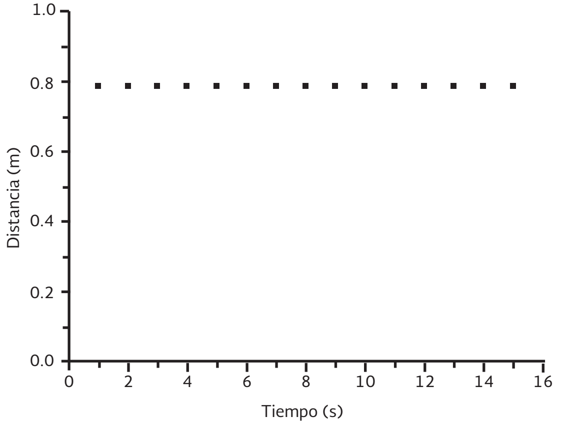


Figura B.

1. ¿A qué distancia del sensor se encontraba la bola al iniciar la toma de datos?
2. ¿Encuentras en la gráfica todos los datos que describen lo que pasó?
3. Ubica sobre la gráfica los nuevos datos que se obtendrían al configurar la calculadora para hacer tomas cada medio segundo.

Para nuestro primer experimento configuramos la calculadora para que el sensor tome distancias cada 0.5 segundos, durante 15 segundos. Se realizó una acción sobre la bola y la calculadora bosquejó la siguiente gráfica:

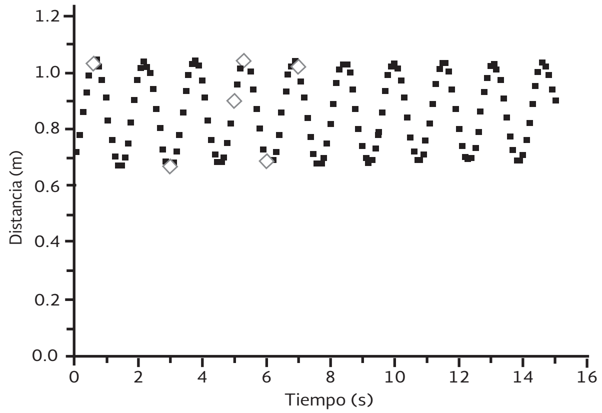


Figura C.

4. Realiza un esquema como la figura C, donde muestres la posición de la bola al iniciar la toma de datos, de tal manera que se obtenga la gráfica anterior.
5. Ese esquema, ¿es único? Si consideras varias posibilidades, dibuja los esquemas posibles, descríbelos y explica por qué los consideras apropiados.
6. El ir y venir de la bola, ¿cómo se identifica en la gráfica?
7. En la figura C se han dejado siete datos sin color de relleno y están marcados con un rombo en lugar de punto. Coloca en la siguiente tabla el tiempo y la distancia que le corresponden a cada uno de estos puntos.

segundo	distancia

Actividad 2

Lo que se graficó se muestra en la figura D. Al iniciar la toma de datos la bola se acercaba al sensor.

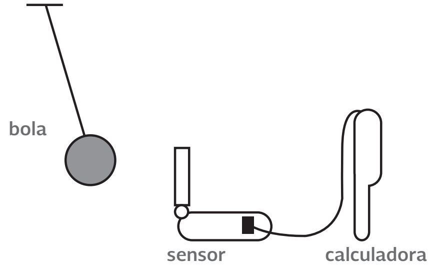


Figura D. Bola en movimiento.

Hicimos una segunda toma de datos, ahora cada 0.05 segundos, durante 15 segundos. La gráfica obtenida fue la siguiente:

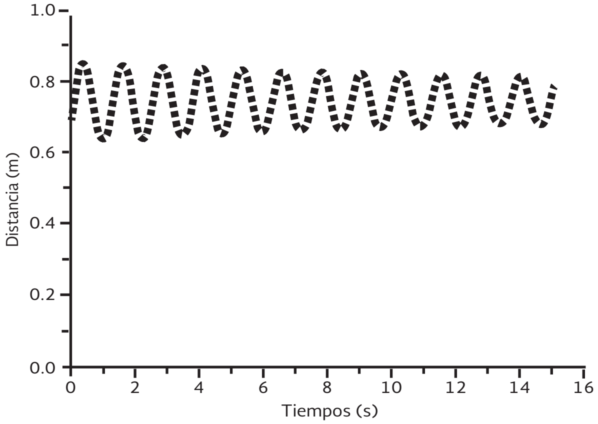


Figura E.

Con una explicación detallada, usando tus propias palabras, responde las siguientes preguntas:

1. Además de la cantidad de datos, ¿encuentras alguna diferencia entre las dos tomas?
2. Considerando las gráficas, ¿cómo explicarías el movimiento de la bola?
3. Retoma tu esquema o esquemas de la actividad 1 y compara con tu respuesta la pregunta anterior. ¿Se reflejan las mismas características en los esquemas?
4. En los primeros 5 segundos, ¿cuál es la distancia máxima que se alcanza entre el sensor y la bola? ¿Cuál es la distancia mínima?
5. En los últimos 5 segundos, ¿cuál es la distancia máxima que alcanza entre el sensor y la bola? ¿Cuál es la distancia mínima?
6. ¿Cómo explicarías la diferencia entre la distancia máxima (o mínima) de los primeros y la de los últimos segundos?
7. Con un marcatextos sombrea los puntos de la gráfica donde la distancia entre el sensor y la bola crece, y con uno de otro color sombrea los puntos donde esta distancia disminuye.

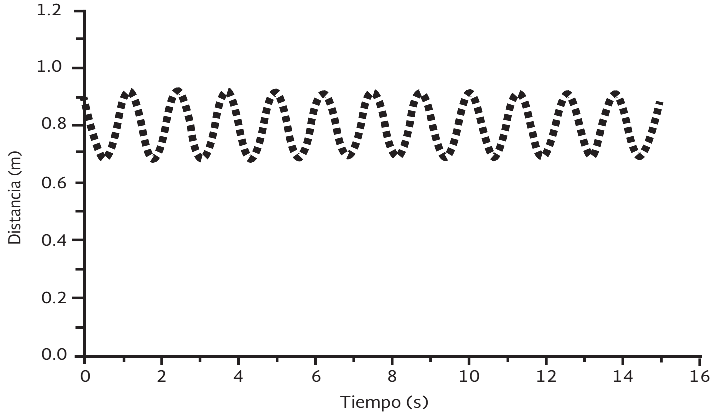


Figura F.

8. En las gráficas de las figuras E y F, ¿cómo determinas si la bola se acerca o se aleja del sensor?

Actividad 3

La siguiente toma de datos, cada 0.05 segundos durante 15 segundos, se realizó con la bola colgando de un cordón cuya longitud del techo al centro de la bola es de 60 centímetros, como se muestra en la figura G.

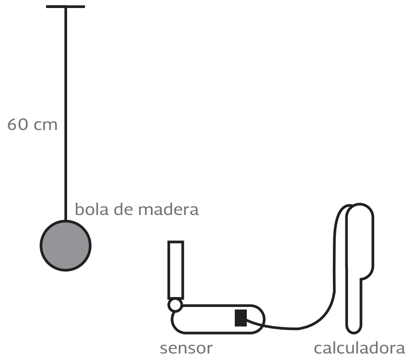


Figura G. Usando un cordón de 60 cm.

La gráfica obtenida por la calculadora se muestra a continuación:

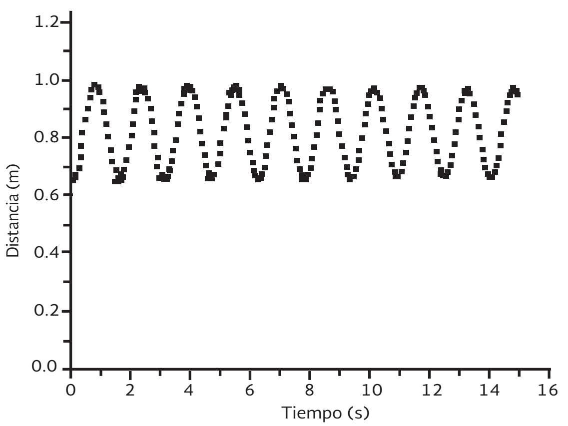


Figura H.

1. Realiza un esquema que muestre la posición del sensor al iniciar la toma de datos.
2. Durante la toma de datos, ¿cómo se reflejan, en el comportamiento de las curvas, las distancias más lejanas del sensor?
3. Durante la toma de datos, ¿cómo se reflejan en el comportamiento de las curvas, las distancias más cortas del sensor?
4. Al aumentar el tamaño del cordón, ¿percibes algún cambio en el valor de los datos o en la gráfica?, ¿cuál? Descríbelo detalladamente.

En la siguiente gráfica se muestran los datos de una toma cuando la bola cuelga de un cordón de 40 cm y los datos de una toma cuando cuelga de un cordón de 60 cm.

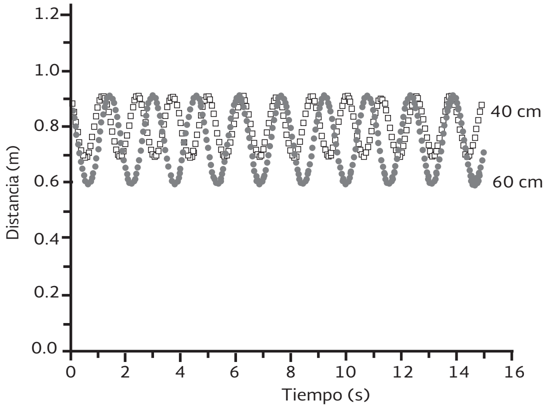


Figura I.

5. ¿Muestra las mismas diferencias que inferiste de la lectura de las gráficas previas?
6. Explica detalladamente las diferencias que encuentras entre ambas tomas en esta gráfica.

Actividad 4

En la siguiente gráfica se muestran las distancias entre el sensor y la bola, tomando los datos cada 0.025 segundos, durante 5 segundos.

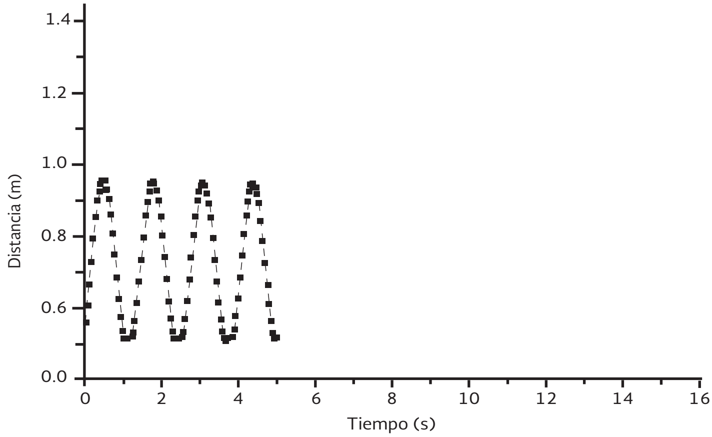


Figura J.

Considera que la bola continúa con su movimiento, que se comporta como el péndulo de un reloj. Usa la figura J y responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál sería la distancia a la que se encontraría el péndulo del sensor en el segundo 60? ¿Alejándose o acercándose al sensor?
2. ¿Usaste alguna parte de la gráfica para poder realizar la predicción? En caso positivo, señala dicha parte.
3. En la siguiente figura, la K, ¿cuál sería la distancia a la que estaría el péndulo del sensor en el segundo 14?
4. Compara el método de predicción utilizado para la figura J y para la figura K, ¿en qué difieren? ¿Cómo se relaciona esta diferencia con el tipo de repetición que la figura presenta?

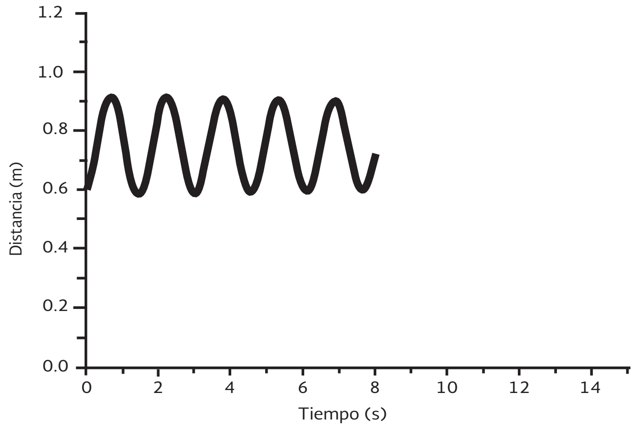


Figura K.

Actividad 5

La velocidad media o promedio de un objeto se define como la razón entre el desplazamiento y el tiempo transcurrido. Por ejemplo, cuando se dice que un automóvil lleva una velocidad de 100 kilómetros por hora, se entiende que en una hora recorre 100 km.

Es decir, en el momento inicial ($t_0 = 0$) no ha recorrido ninguna distancia (d_0=0), pero al cabo de una hora (t_1=1) ha recorrido 100 km (d_1=100)

$$v = \frac{distancia\ final - distancia\ inicial}{tiempo\ final - tiempo\ inicial} = \frac{d_1 - d_0}{t_1 - t_0} = \frac{100\ km - 0\ km}{1h - 0h} = \frac{100\ km}{1h} = 100\frac{km}{h}$$

Sin embargo, por experiencia sabemos que es difícil que un automóvil se mantenga a esa velocidad durante una hora completa. Por eso es común que el estudio de las velocidades se realice en intervalos pequeños de tiempo y de ahí la importancia de haber tomado datos cada 0.05 segundos en nuestro segundo experimento. La velocidad instantánea se define como el valor al que se acerca la velocidad media cuando el intervalo de tiempo (t_n, t_n–1) es muy pequeño.

A continuación aparece una tabla tiempo-distancia correspondiente a uno de los experimentos que realizaste. Calcula las velocidades instantáneas en los tiempos dados, observa el ejemplo.

	Segundo	Distancia	Velocidad instantánea
t_0	0.05	0.876	
t_1	0.1	0.856	$v_1 = 0.4$
t_2	0.15	0.83	
t_3	0.2	0.8	
t_4	0.25	0.768	
t_5	0.3	0.735	
t_6	0.35	0.703	
t_7	0.4	0.673	
t_8	0.45	0.645	
t_9	0.5	0.623	
t_{10}	0.55	0.607	
t_{11}	0.6	0.596	
t_{12}	0.65	0.591	
t_{13}	0.7	0.593	
t_{14}	0.75	0.6	
t_{15}	0.8	0.614	
t_{16}	0.85	0.633	
t_{17}	0.9	0.657	
t_{18}	0.95	0.685	
t_{19}	1	0.718	
t_{20}	1.05	0.75	
t_{21}	1.1	0.783	
t_{22}	1.15	0.814	
t_{23}	1.2	0.843	
t_{24}	1.25	0.867	
t_{25}	1.3	0.884	
t_{26}	1.35	0.9	
t_{27}	1.4	0.909	
t_{28}	1.45	0.911	
t_{29}	1.5	0.907	
t_{30}	1.55	0.896	

	Segundo	Distancia	Velocidad instantánea
t_{31}	1.6	0.88	
t_{32}	1.65	0.859	
t_{33}	1.7	0.834	
t_{34}	1.75	0.805	
t_{35}	1.8	0.773	
t_{36}	1.85	0.741	
t_{37}	1.9	0.709	
t_{38}	1.95	0.677	
t_{39}	2	0.65	
t_{40}	2.05	0.628	
t_{41}	2.1	0.61	
t_{42}	2.15	0.598	
t_{43}	2.2	0.593	
t_{44}	2.25	0.593	
t_{45}	2.3	0.6	
t_{46}	2.35	0.612	
t_{47}	2.4	0.63	
t_{48}	2.45	0.653	
t_{49}	2.5	0.68	
t_{50}	2.55	0.711	
t_{51}	2.6	0.745	
t_{52}	2.65	0.777	
t_{53}	2.7	0.809	
t_{54}	2.75	.837	
t_{55}	2.8	0.862	
t_{56}	2.85	0.88	
t_{57}	2.9	0.895	
t_{58}	2.95	0.906	
t_{59}	3	0.91	
t_{60}	3.05	0.907	
t_{61}	3.1	0897	

En la siguiente gráfica se han representado, como hasta ahora, las distancias entre el sensor y la bola. Con pequeños puntos, para ver la diferencia, ubica en la gráfica los puntos que corresponden a la velocidad a la que se mueve la bola. Por ejemplo, el primer punto le corresponde al par ordenado (0.1, 0.856) y que corresponde a una velocidad de −0.4 centímetros por segundo en el segundo 0.1

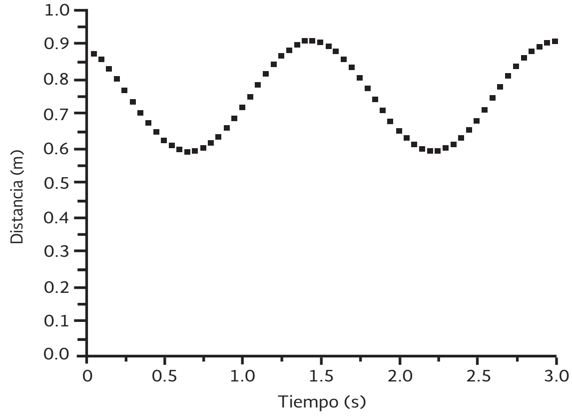


Figura L.

Con tus propias palabras, explica detalladamente:

1. ¿Cómo describirías el comportamiento global de las velocidades instantáneas de la bola?
2. En términos de la gráfica de distancias y lo que representa en el experimento, ¿cómo interpretarías las velocidades negativas?
3. ¿Visualizas alguna relación global o puntual entre las gráficas de la velocidad y de la distancia? ¿Cuál o cuáles?
4. Sombrea, sobre la gráfica de distancias, los puntos donde hay velocidad positiva y, usando otro color, donde tiene velocidad negativa. ¿Cómo se relacionan estas zonas de velocidad positiva y negativa con las zonas de crecimiento y decrecimiento que marcaste en la pregunta 7 de la actividad 2?
5. ¿Qué valores toma la velocidad en las "crestas" y los "valles" de la gráfica de distancias?, en términos del experimento ¿qué significarían estos puntos?

A continuación se muestra la gráfica del mismo experimento, pero ahora con más datos.

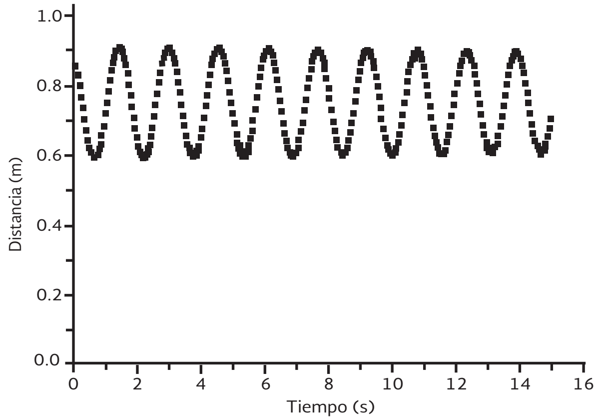


Figura M.

6. Con base en el comportamiento de la velocidad de la figura L dibuja en trazo continuo, sobre la gráfica figura M, el comportamiento de la velocidad durante 15 segundos.
7. La gráfica de la velocidad puede indicarnos cómo está variando la distancia del péndulo. Por ejemplo, los puntos donde la gráfica velocidad cruza al eje x, donde la velocidad es cero, indican algún cambio en el comportamiento de las distancias, ¿cuál?, ¿qué significa este cambio en el experimento?

Actividad 6

Se dice que un objeto cuya velocidad cambia con el tiempo está acelerado. Un auto, por ejemplo, cuya velocidad se incrementa desde cero hasta 80 km/hora está acelerado; si otro auto puede lograr este cambio de velocidad en menos tiempo que el primero, se dice que sufre una aceleración mayor. Entonces, la aceleración en un intervalo de tiempo puede obtenerse con el siguiente cociente:

$$a = \frac{v_1 - v_1}{t_1 - t_1}$$

En cada una de las siguientes gráficas se grafican simultáneamente las curvas que describen las variaciones de la distancia entre un péndulo y un sensor de movimiento, así como su velocidad y su aceleración. Indica en cada gráfico qué curva corresponde a la gráfica de la distancia, cuál a la gráfica de velocidad y cuál a la de aceleración.

1. Explica detalladamente los criterios que usaste para identificar la gráfica de cada una. Discute ampliamente y señala si puede haber más de una alternativa
2. Llena las tablas de cada gráfica con los valores que se te piden.

Valores máximos

Distancia ____________

Velocidad ____________

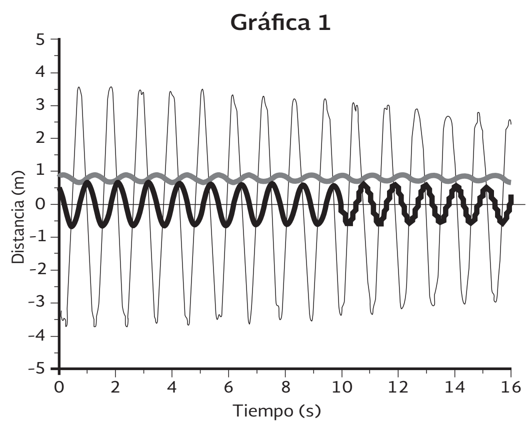
Aceleración ____________

Valores mínimos

Distancia ____________

Velocidad ____________

Aceleración ____________



Valores máximos

Distancia ____________

Velocidad ____________

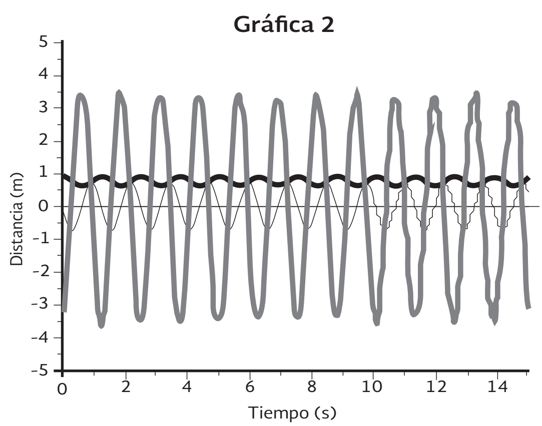
Aceleración ____________

Valores mínimos

Distancia ____________

Velocidad ____________

Aceleración ____________



Valores máximos

Distancia ____________

Velocidad ____________

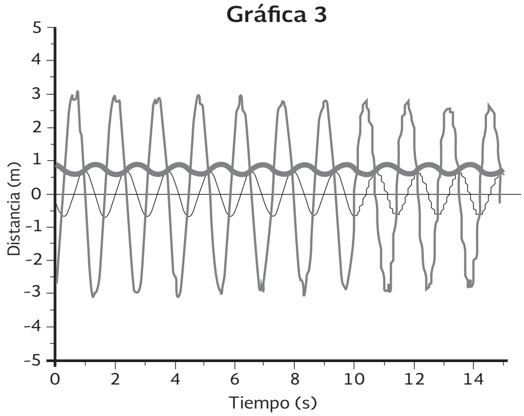
Aceleración ____________

Valores mínimos

Distancia ____________

Velocidad ____________

Aceleración ____________



Valores máximos

Distancia ____________

Velocidad ____________

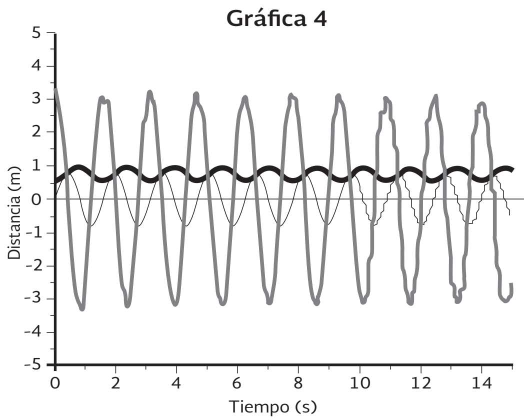
Aceleración ____________

Valores mínimos

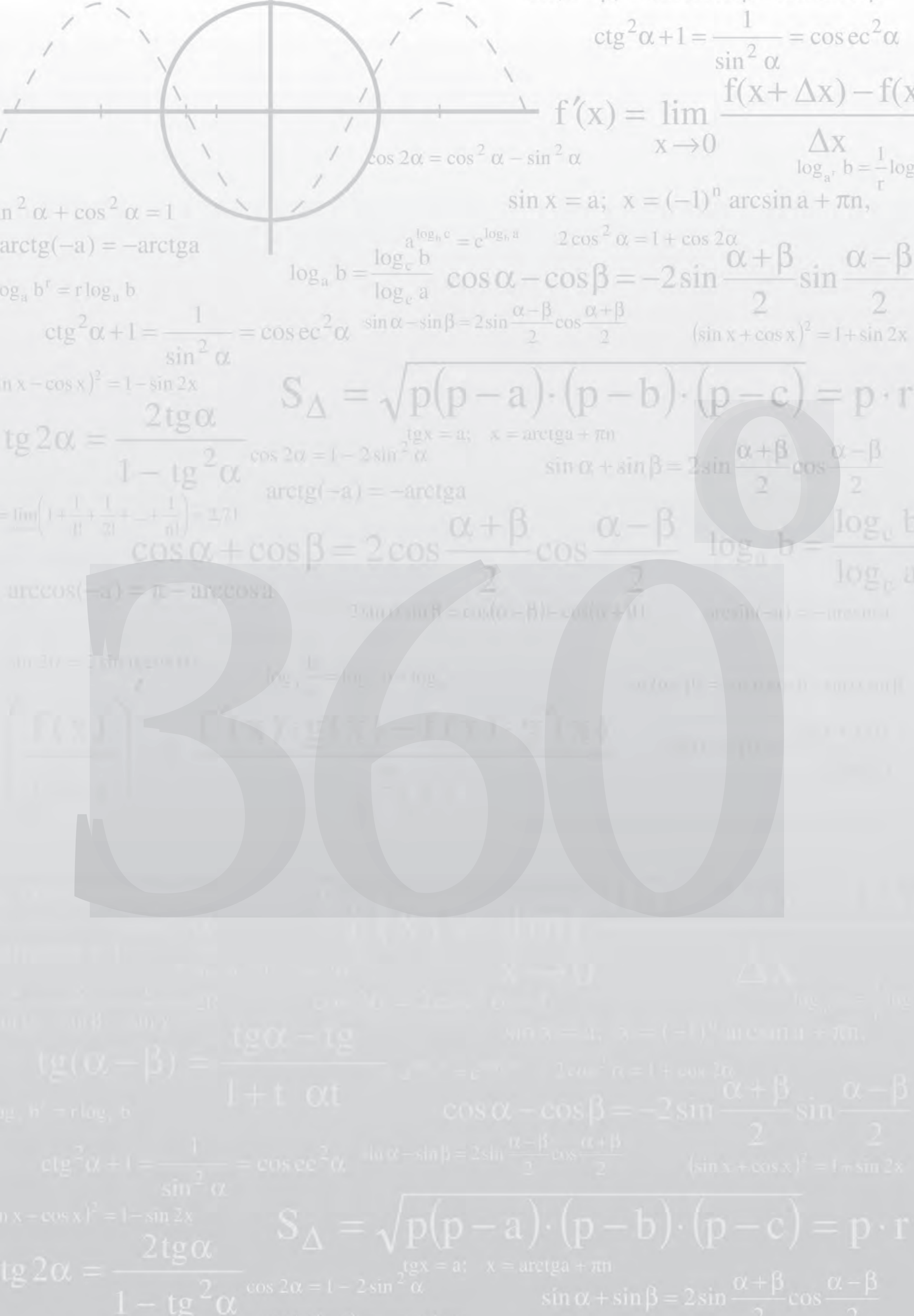
Distancia ____________

Velocidad ____________

Aceleración ____________



Recuerde que esta situación-problema está intencionalmente diseñada para provocar el desarrollo de un tipo particular de pensamiento matemático y, en ese sentido, no hay necesidad de manejar objetos matemáticos ni sus estructuraciones formales, pero sí de matematizar las experiencias que se tienen con el entorno haciendo uso de herramientas como las gráficas. También cabe aclarar que un estudio de desde la Física haría emerger herramientas matemáticas más complejas, de ahí la importancia de los enfoques transversales en la educación en cualquier nivel, pero sobre todo en el nivel medio superior, donde los tópicos científicos pueden abordarse de forma integral.


360°

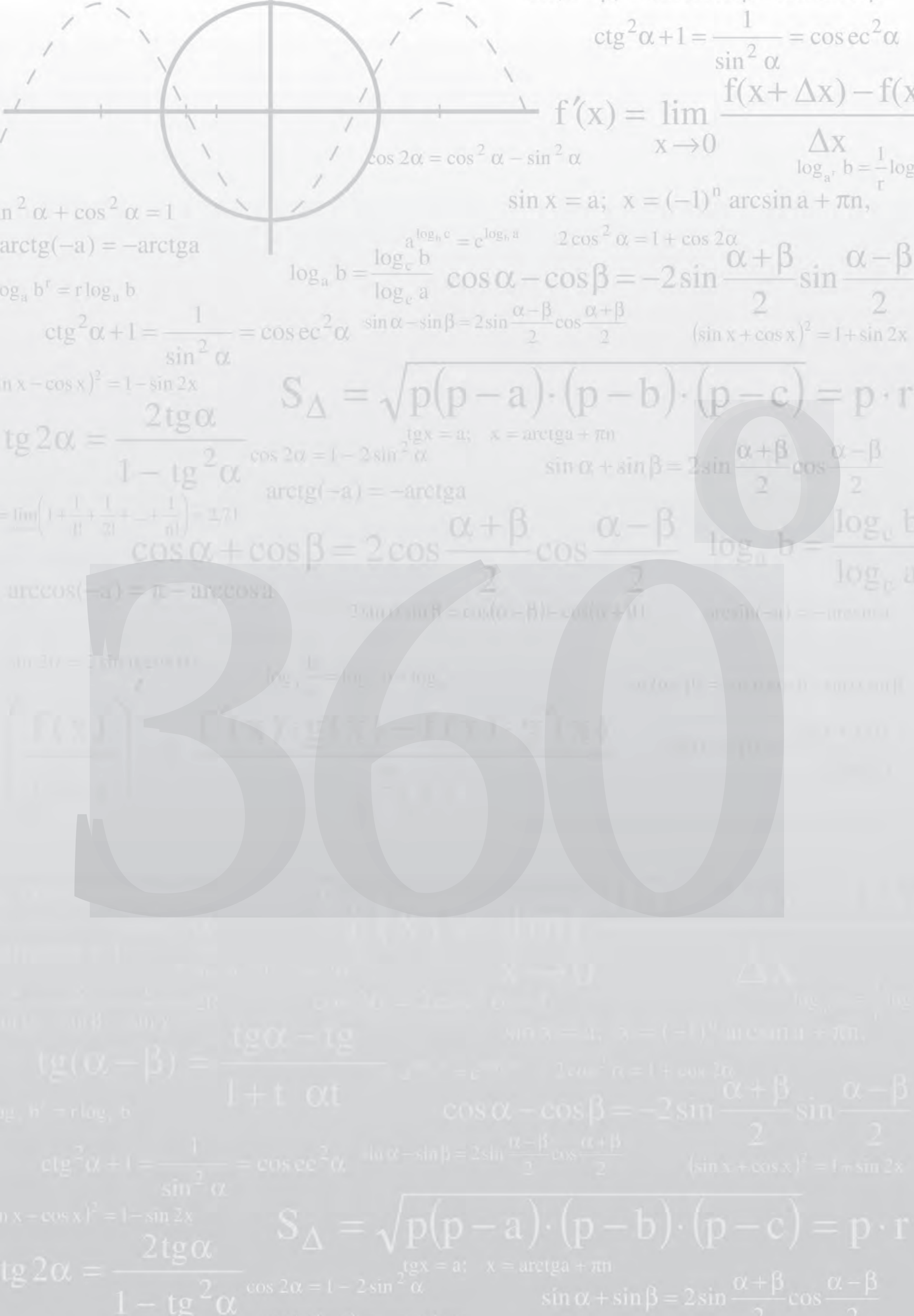
4. REFLEXIONES FINALES

Los usos y los significados de la matemática escolar son construcciones humanas producto de la experiencia y, en consecuencia, susceptibles de reconstruirse en las condiciones apropiadas. En este sentido, nos proponemos que los estudiantes en situación escolar no sientan la necesidad de negar o abandonar su pensamiento social para aprender un saber pre-establecido por el discurso matemático escolar; por el contrario reconocemos la importancia de incorporarlo a la construcción de un conocimiento funcional dentro del contexto formativo en el que se sitúa. Así, la matemática debe reconocerse, por el estudiante, como conocimiento producto de su hacer y pensar en interacción con su entorno.

Por este motivo, la sección previa no pretende ser una receta de cómo enseñar trigonometría, reconocemos la importancia de contextualizar la actividad didáctica en el entorno particular de profesores y estudiantes; desde la elección de las herramientas (por ejemplo, uso o no de tecnología computacional) y los materiales, hasta el tipo de situaciones-problemas, según la ubicación curricular de los contenidos y los problemas resueltos con anterioridad o en el futuro que puedan vincularse con lo trigonométrico; la valoración de los conocimientos previos y la funcionalidad de las situaciones-problema en la formación del estudiante (por ejemplo, pensando en los bachilleratos tecnológicos que puedan identificar tareas profesionales donde se haga uso de los conocimientos trigonométricos en la resolución de otro tipo de tareas), etc.

Lo que resulta imprescindible resaltar es que un diseño de clase que retome la base de prácticas propuesta debe contemplar la valoración del aprendizaje en todo aquello que produce el estudiante. El pensamiento trigonométrico es un tipo particular del pensamiento matemático, entendido éste como todas las formas posibles de construir ideas matemáticas, incluyendo procesos avanzados del pensamiento como la abstracción, justificación, visualización, estimación y razonamiento bajo hipótesis (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2000). En consecuencia, y como se plantea en Montiel y Buendía (en prensa), es necesario poner atención en las argumentaciones, los procedimientos y las explicaciones que el estudiante configura, en forma escrita, icónica, gestual o verbal, para responder a una tarea específica.

En el reconocimiento de las variables didácticas que permitirían usar y/o adaptar las actividades de la sección previa, en un diseño de clase, situamos el conocimiento y la experiencia del profesor; por lo que dejamos el capítulo en puntos suspensivos, esperando que la comunicación e interacción con los profesores nos permita acercarnos al aula y alimentarnos de su experiencia para validar las propuestas e incrementar la innovación didáctica fundamentada en la investigación científica en Matemática Educativa...


360°

BIBLIOGRAFÍA

Beltrán, S. (2013). *El papel de la modelación en el desarrollo del pensamiento funcional trigonométrico en estudiantes del nivel medio superior.* Tesis de maestría no publicada. México: CICATA-IPN, Unidad Legaria México.

Buendía, G. y Montiel, G. (2011). From history to research in mathematics education: Socio-epistemological elements for trigonometric functions. V. Katz y C. Tzanakis (Eds.), *Recent developments on introducing a historical dimension in Mathematics Education*, Mathematical Association of American, 67-82.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Cordero, F., Alanís, J. A., Rodríguez, R. A. y Garza. A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*, México: Trillas.

Cantoral, R., Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*, México: Thomson.

De Gandt, F. (1999). Matemáticas y realidad física en el siglo XVII (de la velocidad de Galileo a las fluxiones de Newton. F. Guénard, y G. Lelievre, (Eds.), *Pensar la matemática*, Barcelona: Tusquets Editores, 41-68.

De Kee, S., Mura, R. y Dionne J. (1996). La compression des notions de sinus et de cosinus chez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics* 16(2), 19-22.

Durán, A. (2009). Euler y los infinitos (grandes y pequeños). Disponible en: http://upcommons.upc.edu/video/bitstream/2099.2/333/7/333_Article.pdf, recuperado el 13 de agosto de 2009.

Grabovskij, M. y Kotel'Nikov, P. (1971). The use of kinematic models in the study of trigonometric functions. *Educational Studies in Mathematics* 3(2), 147-160.

Gray, G. y Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A proceptual view of elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-141.

Jácome, G. (2011). *Estudio socioepistemológico de la razón trigonométrica. Elementos para la construcción de su naturaleza proporcional*, tesis de maestría no publicada, México: CICATA-IPN.

Kendal, M. y Stacey, K. (1998) Teaching trigonometry. *Australian Mathematics Teacher* 54(1), pp. 34-39.

Maldonado, E. (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica*, tesis inédita de maestría, México: Cinvestav-IPN.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de doctorado no publicada, México: CICATA-IPN, Unidad Legaria México.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico.* México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. y Buendía, G. (en prensa). Desarrollo del pensamiento funcional trigonométrico. G. Buendía, M. Ferrari y G. Martínez (Coords.), *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Moore, K. (2010). The role of quantitative and covariational reasoning in developing precalculus students' images of angle measure and central concepts of Trigonometry. *Proceedings for the Thirteenth SIGMAA on Research in Undergraduate Mathematics Education Conference*. Disponible en: http://sigmaa.maa.org/rume/crume2010/Archive/Moore.pdf.

Moore, K. (2012). Coherence, Quantitative Reasoning, and the Trigonometry of Students. R. Mayes y L. Hatfield (Coedits.), *Quantitative Reasoning and Mathematical Modeling: A Driver for STEM Integrated Education and Teaching in Context*. EU: College of Education, University of Wyoming. Recuperado el 19 de septiembre de 2013. Disponible en: http://www.uwyo.edu/wisdome/_files/documents/moore.pdf.

Moore, K., LaForest, K. y Kim, H. (2012). The unit circle and unit conversions. *Proceedings of the Fifteenth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education,* Portland, OR: Portland State University. Disponible en: http://sigmaa.maa.org/rume/RUME_XV_Proceedings_Volume_1.pdf, pp. 16-31.

Panza, M. (2001). Introducción. *Tratado de métodos de series y fluxiones* (Trad. I. Vargas). México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. [Trabajo original publicado en 1671].

Rotaeche, A. y Montiel, G. (2011). Desarrollo histórico como mediador de conocimientos para la enseñanza del concepto de ángulo. G. Buendía (Coord.), *Reflexión e investigación en Matemática Educativa,* México: Lectorum, 191-218.

Rotaeche, R. (2008). *La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria.* Tesis de maestría no publicada. México: CICATA-IPN, Unidad Legaria México..

Santos, Z. (2013). *El uso de las gráficas para resignificar elementos de la funcionalidad trigonométrica.* Tesis de maestría no publicada. México: CICATA-IPN, Unidad Legaria México.

Sep (2011). *Programas de Estudio. Guía para el maestro.* Educación Básica Secundaria, Matemáticas. México: SEP.

Vohns, A. (2006). Reconstructing basic ideas in geometry-an empirical approach. *ZDM 38*(6), 498-504.

Weber, K. (2008). *Teaching trigonometric functions: Lessons learned from research. Mathematics Teacher 102*(2), 144-150.

Weber, K. (2005). Student's understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal 7*(3), 91-112.

Se terminó de imprimir y encuadernar en diciembre de 2013
en Impresora y Encuadernadora Progreso, S. A. de C. V. (IEPSA),
Calzada San Lorenzo 244; C.P. 09830, México, D. F.
El tiraje fue de 10,000 ejemplares.

ISBN: 978-607-9362-02-7

SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR www.sems.gob.mx